АКАДЕМИЯ НАУК СССР. ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

В 430/163 С.Л.

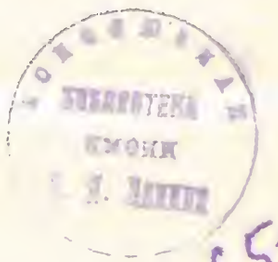
В. МОЛОДШИЙ

ЭФФЕКТИВИЗМ В МАТЕМАТИКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1938

51
М 75

Книга содержит критический разбор эффективизма — одного из идеалистических направлений в современной буржуазной математике. Являясь в сущности разновидностью махизма, эффективизм из противоречий, на которые наталкивается обоснование математики, пытается выбраться путем выкидывания из математики целых ее областей, ограничивая ее предмет и метод. Книга рассчитана на подготовленного читателя.



40265-38

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1908 г. вышла в свет работа Ленина «Материализм и эмпириокритицизм», разоблачившая в числе различных видов идеализма его махистскую разновидность. В «Материализме и эмпириокритицизме» Ленин вскрыл антинаучность и реакционность махизма, показал, что махизм есть путаная разновидность берклеанства, «презренная *партия середины* в философии, путающая по каждому отдельному вопросу материалистическое и идеалистическое направление»[1]. Ленин показал, что махизм всегда и везде вел борьбу против материализма, в конечном счете всегда и везде защищал идеологию буржуазии. На примере физики Ленин доказал, что идеализм запутывает, усложняет трудности роста естествознания, приводит естествознание к кризису. В «Материализме и эмпириокритицизме» Ленин развил, поднял на новую ступень диалектический материализм, развил учение о *партийности* философии.

С момента выхода в свет «Материализма и эмпириокритицизма» прошло немало лет. Но ни одно слово этого гениального ленинского творения не потеряло своей актуальности. Напротив, актуальность «Материализма и эмпириокритицизма» возросла, ибо весь ход развития буржуазной идеалистической философии доказал правильность ленинского анализа буржуазной идеалистической философии в связи с кризисом новейшего естествознания. Актуальность «Материализма и эмпириокритицизма» возросла еще и потому, что современный махизм (так называемый неомахизм) еще более реакционен, еще более антинаучен. «Материализм и эмпириокритицизм» являлся и является незаменимым пособием в борьбе против буржуазной идеалистической философии, в частности в борьбе против махизма.

В современной буржуазной философии математики господствующее положение занимают идеалистические течения, именно формализм Гильберта и интуиционизм Брауэра и Вейля.

---

[1] *Ленин*, Соч., т. XIII, стр. 278.

Но наряду с ними немалым авторитетом пользуются и такие идеалистические течения, как махизм в форме конвенционализма Пуанкаре и эффективизма Бореля. Эффективизм Бореля нашел убежденных сторонников даже среди нескольких математиков Советского Союза, в числе которых находится акад. Н. Лузин. Эффективизм исходит из махистского, субъективно-идеалистического понимания предмета, метода и закономерностей развития математики. Эффективизм сводит задачу преодоления трудностей обоснования современной математики к ограничению поля и методов ее исследований и тем самым тормозит преодоление этих трудностей и углубляет кризис буржуазной математики.

Показать, что эффективизм есть разновидность махизма в математике, показать антинаучность и реакционность эффективизма — такова главная цель этой работы.

ВВЕДЕНИЕ

КАК В НАЧАЛЕ XVIII СТОЛЕТИЯ ЕПИСКОП БЕРКЛИ «ОПРОВЕРГАЛ» МАТЕРИАЛИЗМ В МАТЕМАТИКЕ

В 1710 году епископ Беркли издал «Трактат о началах человеческого знания». Цель этого трактата Беркли изложил с предельной ясностью: «На основе учения о материи или о телесной субстанции (т. е. на основе *материализма*. — *В. М.*), — говорит он, — воздвигнуты были все безбожные построения атеизма и отрицания религии... Нет надобности рассказывать о том, каким великим другом атеистов во все времена была материальная субстанция. Все их чудовищные системы до того очевидно, до того необходимо зависят от нее, что, раз будет удален этот краеугольный камень, — и все здание неминуемо развалится»[1].

Опровергнуть материализм в философии и естествознании, опровергнуть атеизм и защитить религию — такова была основная цель «Трактата о началах человеческого знания».

Опровергнуть материализм Беркли не удалось. Однако следует вспомнить, как Беркли боролся против стихийного материализма естествознания и математики. В рассуждениях Беркли легко обнаружить *прообразы* того, что можно прочесть в многочисленных сочинениях некоторых современных буржуазных философов и математиков, в первую очередь конвенционалистов и эффективистов.

Беркли пытался опровергнуть материализм с помощью философии *субъективного идеализма*. В основных чертах его философия сводится к следующему:

1. Многие философы считают отвлеченные идеи копиями, снимками с существующей вне нашего сознания материальной субстанции. Это, по мнению Беркли, глубокое заблуждение. Вне сознания материя не существует, следовательно, нет и не может быть отвлеченных идей. Объекты человеческого знания — «отчасти идеи, действительно запечатленные в наших ощущениях, отчасти идеи, воспринятые через наблюдение над состоянием и действиями души, отчасти идеи, образо-

[1] Цит. по *Ленину*, Соч., т. XIII, стр. 22.

ванные при помощи памяти и воображения, наконец, идеи, возникающие через соединение, разделение или просто представление того, что было первоначально воспринято одним из вышеуказанных способов... Так, напр. если наблюдается, что некоторые цвет, вкус, запах, фигура и консистенция даны вместе, то они принимаются за одну отдельную вещь, обозначаемую названием яблоко. Другие собрания идей составляют камень, дерево, книгу и тому подобные ощущаемые вещи...» [1].

Таким образом, для Беркли *вещи суть «собрания идей»*, причем под словом «идея» он понимает не отвлеченные мысли, а ощущения, впечатления и т. п. перечисленные им душевные состояния.

2. Далее Беркли говорит, что наряду с «бесконечным разнообразием идей или предметов знания, существует... нечто познающее или воспринимающее их» [2]. Это познающее деятельное существо есть *ум*, *дух*, *душа*, или *я* (курсив Беркли). Дух, или я, не один, их много, каждый человек есть я. Воспринимаемые идеи не могут существовать вне я. «Все вещи, составляющие вселенную, не имеют существования вне духа... их *бытие* состоит в том, чтобы быть воспринимаемыми или познаваемыми, ... следовательно, поскольку они в действительности не восприняты мною или не существуют в уме моем или какого-либо другого сотворенного духа, они либо вовсе не имеют существования, либо существуют в уме какого-либо вечного духа»[3]. *Существовать значит быть воспринимаемым или познаваемым* — таково одно из основных утверждений философии Беркли.

3. Поставив вопрос о причине восприятия *я* постоянной, независимой от воли *я*, последовательности идей, Беркли усматривает эту причину в нематериальной субстанции, т. е. в боге. Именно бог навязывает людям (т. е. *духам*, *я* и т. п.) определенный, независимый от их воли, порядок ощущений. Именно «идеи, запечатленные в ощущениях творцом природы, называются *действительными вещами*» [4]. «Те твердые правила и определенные методы, коими дух, от которого мы зависим, порождает или возбуждает в нас идеи ощущений, называются законами природы» [5].

---

[1] *Беркли*, Трактат о началах человеческого знания, русск. пер. 1905 г., стр. 60—61.
[2] Там же, стр. 61.
[3] Там же, стр. 64.
[4] Там же, стр. 83.
[5] Там же, стр. 81.

4. Но кроме данных нам богом ощущений, говорит Беркли, существуют идеи нашего воображения, иногда просто ошибочные. «Идеи ощущений, — пишет Беркли, — определеннее, живее и отчетливее, чем идеи воображения» [1], следовательно, первые идеи «имеют больше реальности». В другом месте Беркли усматривает реальность в одновременном одинаковом восприятии одних и тех же чувственных ощущений многими людьми. Например, можно ли верить реальному превращению воды в вино? «Если, — пишет Беркли, — все присутствовавшие за столом видели, обоняли, вкушали и пили вино и испытывали его действие, то, по-моему, не может быть сомнения в его реальности» [2]. Последователь философии Беркли А. Фрейзер поясняет: «Одновременное сознание различными лицами одних и тех же *чувственных* идей, в отличие от чисто индивидуального или личного сознания *воображаемых* объектов и эмоций, рассматривается здесь как доказательство *реальности* идей первого рода» [3], т. е. идей, навязанных нам богом, но не созданных нашим воображением.

Итак, запомним, что Беркли отрицает материальную, существующую вне нашего сознания, реальность, что для него существовать значит *быть в восприятии*, причем критерием реальности является одновременное восприятие одних и тех же ощущений многими людьми. В дальнейшем нам не раз придется говорить об этих основных пунктах философии Беркли.

Посмотрим теперь, каковы выводы Беркли в отношении естествознания и математики.

Беркли критиковал естествоиспытателей и математиков за их стихийный материализм. Многие естествоиспытатели думают, писал Беркли, что «какие бы шаги ни были сделаны как древними, так и новыми философами в деле изучения природы, все они исходят от предположения, что телесная материя, или субстанция, действительно существует»[4]. Больше того, не только естествоиспытатели, но даже и «математики не менее глубоко, чем другие люди, погружены в заблуждения, вытекающие из учения об общих отвлеченных идеях и о существовании предметов вне духа» [5].

Отсюда Беркли заключает, что многие выводы математики ошибочны.

---

[1] *Беркли*, Трактат о началах человеческого знания, стр. 81.
[2] Там же, стр. 122—123.
[3] Цит. по *Ленину*, Соч., т. XIII, стр. 25.
[4] *Беркли*, Трактат о началах человеческого знания, стр. 97.
[5] Там же, стр. 152.

Повозмущавшись над «наивностью» естествоиспытателей, Беркли начинает их поучать: «Связь идей» (не забудьте, что для Беркли идеи и вещи — одно и то же) «не предполагает отношения *причины* к *следствию*, а только отношение метки или *знака* к вещи, *обозначаемой* так или иначе» [1]. «Видимый мною огонь есть не причина боли, испытываемой мною при приближении к нему, но только предостерегающий меня от нее значок. Равным образом шум, который я слышу, есть не следствие того или иного движения или столкновения окружающих тел, но их значок».[2] Ясно, что, по мнению Беркли, осведомляет нас посредством этих символов не кто иной, как бог. А посему «именно в отыскании и попытках понимания этого языка (если можно так сказать) творца природы должна заключаться задача естествоиспытателя, а не в притязании объяснить вещи телесными причинами» [3]. Столь же реакционная задача была возложена Беркли и на математику.

Установив «цель» естествознания и математики, Беркли перешел к критике всего того, что проникло в математику в связи с «вредным предположением» о существовании материальной субстанции. В этом направлении он критикует арифметику, геометрию и анализ бесконечно-малых.

По мнению Беркли, математики заблуждаются, думая, что в арифметике они имеют дело с отвлеченными понятиями, описывающими некоторые соотношения между реальными вещами. Числа — «создание духа», они — «*знаки*, которые однако подвергаются исследованию не ради их самих, но потому, что они показывают нам, как следует поступать относительно вещей и правильно ими распоряжаться» [4].

Еще ожесточеннее критикует Беркли геометрию и анализ бесконечно-малых. На этом пункте критики Беркли нам придется остановиться подробнее.

«В настоящее время, — пишет Беркли, — бесконечная делимость материи признается всеми, по крайней мере самыми авторитетными и значительными философами, которые неопровержимо доказывают ее на основании общепризнанных начал»[5]. Что это за «общепризнанные начала», догадаться нетрудно — это признание существования материальной субстанции. Беркли сожалеет, что математики мыслят так же, как и философы. «*Бесконечная* делимость *конечного* протяжения..., — пишет Беркли,—предполагается и мыслится в такой неразрывной и существенной связи с принципами и доказательствами геометрии, что математики никогда не подвергают ее сомнению или вопросу» [1], Больше того, некоторые геометры, «имеющие громкое имя, не довольствуются мнением, будто конечные линии могут быть делимы на бесконечное число частей, но утверждают далее, что каждая из этих бесконечно-малых частей в свою очередь делима на бесконечное число других частей или бесконечно-малых величин второго порядка, и так далее до бесконечности. Они утверждают, говорю я, что существуют бесконечно-малые части бесконечно-малых частей и т. д.»[2]. Короче говоря, математики позволяют себе рассуждать о *бесконечном*, *существование* которого будто бы неоспоримо так же, как неоспоримо существование *конечного*. По мнению Беркли, математики заблуждаются. «Каждое отдельное конечное протяжение, которое может служить предметом нашего мышления, есть *идея*, существующая лишь в нашем уме, и, следовательно, каждая его часть должна быть воспринимаема... но очевидно, что я не в состоянии различить бесчисленное множество частей в отдельной линии, поверхности или теле, воспринимаю ли я их в ощущении или *представляю себе в моем уме*, из чего заключаю, что они не содержатся там» [3].

Итак, исходя из своих философских установок, Беркли считал понятие бесконечно-малого ложным. Но в равной мере Беркли мог бы отрицать и понятие бесконечного множества точек. Впрочем, по этому вопросу Беркли высказал свое мнение с не оставляющей сомнений определенностью: «в действительности нет такой вещи, как бесконечно-малые части или бесконечное число частей, содержащееся в конечной величине» [4]. Иначе говоря, если мое я может познать или воспринять каждый элемент множества в отдельности и, что еще лучше, если и другие люди их так воспринимают, то для Беркли множество существует. Читатели, знакомые с современной философией математики, без труда узнают в этом выводе из философии Беркли основную идею эффективистов.

Раскритиковав «вредные» идеи анализа бесконечно-малых, Беркли «спешит на помощь» математикам. Если, пишет он, указывают, что многие правильные теоремы были открыты с помощью бесконечно-малых, отсюда только следует, что они могут быть открыты и без помощи бесконечно-малых. Матема-

---

[1] *Ленин*, Соч., т. XIII, стр. 24.
[2] *Беркли*, Трактат о началах человеческого знания, стр. 109.
[3] Там же, стр. 110.
[4] *Беркли*, Трактат о началах человеческого знания, стр. 155.
[5] Там же, стр. 94.

[1] *Беркли*, Трактат о началах человеческого знания, стр. 156.
[2] Там же, стр. 162.
[3] Там же, стр. 157. Курсив мой. — *В. М.*
[4] *Беркли*, Трактат о началах человеческого знания, стр. 163.

тики должны освободиться от бесконечно-малых. Если при этом некоторые из самых «запутанных и утонченных частей умозрительной математики могут отпасть» [1], то особой беды для человечества не будет. Беркли даже попытался в своем «Аналисте» объяснить некоторые результаты анализа без понятия бесконечно-малого. В дальнейшем математическую сторону идей «Аналиста» развил Л. Карно в своих «Размышлениях о метафизике исчисления бесконечно-малых» [2]. Однако математики пошли по пути, подсказанному развитием науки, а не субъективным идеализмом Беркли. И не случайно: берклеанский путь защиты поповщины, путь ограничения математики областью конечных величин, был антинаучен и реакционен. По работам д'Аламбера, Лагранжа, Гаусса, Коши и др. можно проследить, как математики пришли от метафизических бескнечно-малых Лейбница и Ньютона к теории пределов, где бесконечное не уничтожилось, а пополнилось новым содержанием.

В заключение отметим еще одно обстоятельство.

Философ Фрейзер, сторонник берклеанства, называл учение Беркли «естественным реализмом». И действительно, всегда и везде Беркли старался подделаться под реализм: он был «за» реальное существование вещей, он «не» разрывал с мнением всего человечества, он «боролся» за подлинную науку и т.п. Эта маскировка характерна не для одного только Беркли. К ней же прибегают и эффективисты. Самих себя эффективисты называют реалистами, а всех своих противников... идеалистами.

[1] *Беркли*, Трактат о началах человеческого знания, стр. 163. Эту идею Беркли развивает и в «Аналисте».

[2] См. русск. перевод этой работы Л. Карно, ГТТИ, 1936 г.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ТРУДНОСТИ ОБОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕДМЕТА ИССЛЕДОВАНИЙ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Чтобы понять трудности обоснования современной математики, необходимо знать, чем в основном отличается современная математика от математики классической.

Многие буржуазные математики и философы усматривают решающее отличие современной метематики от классической в далеко проведенной разработке ее основных посылок в сторону логической строгости. В подтверждение ссылаются на работы Гаусса, Коши, Вейерштрасса, Кантора, Гильберта и других крупнейших математиков, благодаря которым к концу XIX столетия анализ бесконечно-малых и геометрия получили достаточное логическое обоснование.

Ответ буржуазных математиков недостаточен, он освещает одну, притом не основную, сторону процесса развития современной математики. Буржуазные математики отвечают так не случайно; большинство философствующих буржуазных математиков придерживается идеалистического миропонимания, а современный идеализм придает особое значение формальному обоснованию математики. Чтобы дать правильный, исчерпывающий ответ, нужно рассматривать предмет и закономерности развития математики исходя из позиций диалектического материализма. Методы исследований и способы обоснования математики существенно зависят от ее содержания. Точнее можно сказать так: между развитием методов исследований, и обоснованием математики, и ее фактическим содержанием осуществляется диалектическое взаимодействие на основе роста фактического содержания, обусловленного раньше всего практическими потребностями применения математических теорий. Таким образом, мы сможем ответить на интересующий нас вопрос, если скажем, каковы *особенности* предмета исследований современной математики, насколько она *глубже*

проникла в предмет исследований по сравнению с математикой классической.

На первых ступенях развития содержание математики исчерпывалось арифметикой и обычной трехмерной геометрией Евклида; математика ограничивалась по преимуществу изучением *постоянных* количеств с *постоянными* между ними отношениями. За эти рамки выходили только известные в то время *начатки* алгебры и анализа, где основное внимание сосредоточивалось на изучении переменных величин. «Начала» Евклида являются классическим памятником этого периода развития математики. В «Началах» Евклид связывает понятия точек, прямых и плоскостей с *одной* интерпретацией его геометрии, трактует понятия отношений, в которых могут выступать точки, прямые и плоскости, в одном, не допускающем изменений, смысле.

Математика постоянных величин не может дать достаточно универсальных методов изучения количественной стороны форм *движения* материи. Поэтому, когда в эпоху Возрождения появилась потребность в интенсивном развитии механики, астрономии и, частично, физики, математика стала изучать *переменные* величины [1]. После открытий Декарта, Ньютона и Лейбница основным объектом математических исследований становятся *переменные* величины с *постоянными* между ними отношениями. Ближайшим следствием расширения предмета и разработки новых методов исследований математики было интенсивное развитие новых математических дисциплин — теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, теории функций комплексного переменного и т. п. Именно эти дисциплины впервые дали механике, физике и астрономии методы изучения количественной стороны форм *движения* материи, чего математика постоянных величин сделать не могла. Излишне, пожалуй, особо подчеркивать, что методы математики переменных величин позволили значительно развить и математику постоянных величин.

В середине XIX столетия содержание математики сводилось к теории чисел, алгебре, анализу бесконечно-малых и к трехмерной геометрии Евклида [2]. Основное содержание математики этого времени и принято называть классической математикой. Большинство математиков рассматривало три

---

[1] О причинах развития наук в эпоху Возрождения см. «Диалектику природы» Энгельса.

[2] Открытая к этому времени гиперболическая геометрия не получила всеобщего признания.

первые дисциплины как чисто формальные. Этим выражали тот факт, что данные названных дисциплин отражают количественную сторону объектов различной природы, как говорят, — допускают многие интерпретации, благодаря чему, обратно, они и применимы к исследованию разнообразных объектов. Например, все знали, что арифметика натуральных чисел отражает числовые отношения дискретных объектов весьма разнообразной природы, благодаря чему правила счета применимы к различным объектам. Напротив, геометрия Евклида считалась чуть ли не естественнонаучной дисциплиной, в задачу которой входило только изучение форм реального пространства. По существу под этим понималось, что геометрия Евклида изучает *только одну* область объектов, именно область точек, прямых и плоскостей, описанных Евклидом в его определениях. С принципиальной точки зрения, быть может, наиболее важным открытием XIX столетия надо считать выяснение того, что геометрия столь же формальна и, следовательно, принципиально приложима к различным объектам, как и любая математическая дисциплина. Во второй половине XIX столетия удалось показать, что под понятия объектов каждой геометрической дисциплины можно подводить *любые* объекты, если, во-первых, соответственно природе этих объектов придать определенный смысл понятиям отношений, в которых выступают объекты геометрии, и, во-вторых, если при этом остается в силе *структура* отношений, описанных в аксиомах. Следующие основные открытия подготовили развитие современных взглядов на предмет геометрии: принцип двойственности, геометрия Лобачевского — Больяй, интерпретация Бельтрами планиметрии Лобачевского — Больяи. Классические «Основания геометрии» Гильберта уже целиком базируются на новых идеях; с «Оснований» новые идеи обоснования геометрии получили всеобщее признание. Подобные же факты были открыты и в других математических дисциплинах; в качестве примера можно указать на столь теперь плодотворное понятие группы. Эти факты говорили, что *не только понятия математических объектов, но и понятия математических отношений имеют переменное содержание*. В каждой математической дисциплине неизменное, постоянное значение имеет *структура* отношений, в которых выступают математические объекты.

Первым следствием осознания значения открытых фактов было изменение взглядов передовых математиков на принципы логического обоснования (построения) математических дис-

циплин. В борьбе с отживающими представлениями передовые математики поняли целесообразность построения математических дисциплин во *всей их общности*. Как говорят математики, эта задача решается *формальным* заданием основных посылок любой математической дисциплины, т. е. заданием основных посылок как форм, допускающих *многие* интерпретации. Целесообразность такой формализации очевидна: если основные посылки заданы формально, то, вообще говоря, доказанная с их помощью теорема выражает некоторое свойство, присущее одноименным объектам *любой* интерпретации основопосылок. Целесообразность формализации современной математики иногда выражают в несколько парадоксальной форме; говорят — современный математик не может открыть одну теорему, он сразу открывает бесчисленное множество теорем. Формализация современной математики, таким образом, выражает общность, а потому и бóльшую силу математических методов. Этим, в конечном счете, обусловлено столь интенсивное развитие аксиоматического метода в современной математике. Вопреки довольно распространенному мнению, аксиоматический метод есть, в первую очередь, метод отыскания новых фактов, а не только метод логического обоснования фактов известных.

При формальном задании основопосылок объекты любой математической дисциплины образуют множество элементов, связанных некоторыми отношениями. Тем самым ставится задача изучения, прежде всего, общих свойств множеств, теории множеств, как *фундамента любой* математической дисциплины. С этой точки зрения, например, обычная (трехмерная) геометрия Евклида изучает некоторое множество объектов с определенной метрикой. Именно поэтому начатая Г. Кантором в 70—80-х годах прошлого столетия разработка общей теории множеств сыграла столь революционную роль во всей математике. Развив общее учение о множествах, Г. Кантор создал фундамент для обоснования содержания и методов всей современной математики. Быть может поэтому начало современной математики относят к моменту опубликования основных работ Г. Кантора. Пожалуй правильнее сказать что, подобно Лейбницу и Ньютону, Г. Кантор сумел обобщить, поднять до уровня общих методов то, что в качестве отдельных, разрозненных фактов было известно его предшественникам и современникам.

Теория множеств оказала влияние на классическую математику в нескольких направлениях. Во-первых, удалось завершить обоснование большинства математических дисциплин,

в частности, дать обоснование классическому анализу. Во-вторых, и это главное, на базе теории множеств удалось создать большой общности методы, проникновение которых в математику привело к зарождению новых и к бурному развитию существовавших математических дисциплин. Теория функций действительного переменного, функциональный анализ и топология—вот основные дисциплины, всецело обязанные своим существованием проникновению теоретико-множественных методов в математику. Многие проблемы вариационного исчисления, интегральных уравнений, теории чисел, теории вероятностей и других математических дисциплин или не могут быть решены или сужаются до крайности без применения теоретико-множественных методов. Еще более яркий пример полного преобразования содержания и проблематики дает современная алгебра.

Итак, современная математика отличается от классической тем, что *начиная с конца XIX века она перешла к изучению еще более общих закономерностей, свойственных количественным отношениям и пространственным формам материальной действительности*. Поле и методы исследований современной математики глубже, шире, чем математики классической. Благодаря этому современная математика располагает прекрасными методами решения проблем естествознания и техники. Например, квантовая механика использует данные абстрактной алгебры и теории функциональных пространств. Теория относительности в существенной мере зависит от многомерной дифференциальной геометрии и тензорного анализа. Идеи современной алгебры и топологии оказались полезными для химии (учение о валентности). Тем самым *современная математика подтвердила точку зрения диалектического материализма на математические понятия и теории как на приближенные, все улучшающиеся копии, снимки с изучаемой математикой стороны действительности*. За это говорят и другие факты. Например, при развитии представлений о физическом пространстве вопрос о приложимости геометрии теперь ставят так: какая из существующих геометрий *наилучшим* образом *отражает* пространственные формы изучаемой области явлений. С другой стороны, например, если около ста лет тому назад полагали, что теорема Пифагора присуща только обычным прямоугольным треугольникам, то теперь мы знаем, что свойство, выражаемое этой теоремой, присуще всякому объекту, соответствующему прямоугольному треугольнику, который входит во множество объектов, подчиняющихся аксиомам геометрии Евклида.

§ 2. ТРУДНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Кантор называл каждое множество P определенным, если относительно любого объекта p можно сказать, принадлежит он множеству P или не принадлежит.

Понятие *мощности* является основным в общем учении о множествах; оно позволило расчленить ранее аморфное понятие бесконечного.

Кантор определил мощность как результат абстракции от содержания и порядка элементов множества. Он называл два множества равномощными, если между их элементами возможно установить взаимно-одиночное соответствие. Например, множество всех натуральных чисел и множество всех четных чисел равномощны, так как каждому элементу n первого множества соответствует элемент $2n$ второго и обратно.

Кантор доказал существование *различных* мощностей. Он доказал, что множество рациональных чисел и множество всех алгебраических чисел равномощны множеству натуральных чисел. Но наряду с этим Кантор выяснил, что мощность множества всех действительных чисел больше мощности множества натуральных чисел. Это значит, что всех натуральных чисел недостаточно, чтобы с их помощью перенумеровать все действительные числа, как бы нумерация ни производилась. Мощность множества натуральных чисел принято называть *счетной*; ее обозначают символом $\aleph_0$. Мощность множества действительных чисел называют мощностью *континуума* и обозначают символом c. Согласно сказанному $c>\aleph_0$. Кроме того оказалось, что, каково бы ни было множество M, мощности m, существует множество N, мощности n, такое, что $n>m$. В качестве N можно взять множество всех подмножеств множества M, так как мощность такого множества больше мощности M. Следовательно, возможно говорить о неограниченной последовательности все возрастающих мощностей.

Если множество конечно, понятие мощности совпадает с понятием числа элементов множества и может быть выражено натуральным (количественным) числом. В случае бесконечных множеств не может быть речи о числе их элементов, но им все-таки можно приписать определенную мощность, не зависящую от порядка элементов. Принято к каждому классу равномощных множеств относить один символ, символ мощности [1]. Так символ $\aleph_0$ — символ счетности. Каждый такой

[1] Такое отнесение может быть обосновано. См. статью С. Яновской «О так называемых «определениях через абстракцию»» в «Сборнике статей по философии математики» (стр. 108, 1936 г.).

символ Кантор называл *кардинальным трансфинитным числом*. Кантор впервые открыл некоторые арифметические соотношения между этими числами.

Введение кардинальных трансфинитных чисел расширило и углубило математическое представление бесконечного. В классическом анализе бесконечность была *становящейся*: она обозначала переменную величину, способную стать больше (меньше) любого, наперед заданного положительного (отрицательного) числа. Бесконечность классического анализа — *потенциальная* бесконечность; она может превзойти любое конечное число, но нельзя сказать, что она превзошла все конечные числа. Введя кардинальные трансфинитные числа, Кантор обосновал понятие *актуальной* бесконечности; поскольку, например, $\aleph_0>n$, где n — любое целое положительное число, можно сказать, что кардинальное трансфинитное число $\aleph_0$ уже превзошло все конечные числа.

Разрабатывая учение о мощности и о кардинальных трансфинитных числах, Кантор столкнулся со многими трудностями.

Пусть M и N — какие угодно множества, m и n — соответствующие им кардинальные числа. Можно ли утверждать, что эти числа всегда могут быть соединены одним из знаков $=$, $>$, $<$? Для натуральных m и n это утверждение справедливо, для кардинальных трансфинитных чисел оно не очевидно [1].

Этой проблемы Кантор не решил. В настоящее время она также не решена и называется проблемой *трихотомии*.

Если речь идет о *конкретных* множествах (счетных или мощности континуума), не представляют затруднений доказательства арифметических соотношений, справедливых для мощностей этих множеств. Например, легко доказываются соотношения (где n — любое натуральное число):

$$n+\aleph_0=\aleph_0,\ \aleph_0+\aleph_0=\aleph_0,\ n\aleph_0=\aleph_0,\ \aleph_0^n=\aleph_0,$$

$$\aleph_0+c=c,\ c+c=c,\ \aleph_0 c=c,\ c\cdot c=c \text{ и т. п.}$$

[1] Если *некоторые* элементы множества P могут быть соединяемы знаками $=$, $>$, $<$, то отсюда еще не следует, что *всякие* два элемента множества P могут быть связаны одним, и только одним, из *этих знаков*. Например, рассмотрим множество всевозможных пар действительных чисел (x, y). Будем говорить, что:

пара (x_1,y_1), равна /=/ паре (x_2,y_2), если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$;
пара (x_1, y_1) больше />/ пары (x_2, y_2), если $x_1>x_2$ и $y_1>y_2$;
пара (x_1, y_1), меньше /</ пары (x_2, y_2), если $x_1<x_2$ и $y_1<y_2$.

При таких условиях пары (x_1, y_1), (x_2, y_2), если $x_1>x_2$, но $y_1<y_2$, *не* могут быть связаны ни одним из трех знаков $=$, $>$, $<$.

Однако в настоящее время теория множеств почти не располагает доказательствами *общих* теорем, справедливых для *любых* кардинальных чисел.

Например, можно доказать, что, каково бы ни было кардинальное трансфинитное число n; всегда

$$2^n > n.$$

Точно так же, каково бы ни было множество M, можно доказать существование вполне упорядоченного множества E, мощность которого не ниже и не выше мощности M. Но ни Кантор, ни его последователи не смогли доказать или опровергнуть, что для *любых* кардинальных трансфинитных чисел справедливы соотношения:

1. $m + n = m \cdot n$,
2. $m = m^2$,
3. Если $m^2 = n^2$, то $m = n$,
4. Если $m < n$ и $p < q$, то $m + p < n + q$,
5. Если $m < n$ и $p < q$, то $m \cdot p < n \cdot q$,
6. $\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0$,
7. $c + c + \cdots + c + \cdots = c$,

и т. п.

Тарский показал, что первые пять соотношений эквивалентны трихотомии [1]. Отсюда ясно, что в *настоящее время мы, по существу говоря, еще не имеем общего учения о кардинальных трансфинитных числах.*

Известно что $\aleph_0 < c$. Существует ли хотя бы одно множество M, мощность которого m удовлетворяет соотношению:

$$\aleph_0 < m < c \ ?$$

Эту проблему Кантор также не решил. Кантор высказал предположение, что такого множества M нет. Предположение Кантора называют *гипотезой континуума*. До сих пор гипотеза континуума не решена и, вероятно, является одной из труднейших проблем современной математики. В докладе «Проблемы будущей математики» [2] Д. Гильберт поставил гипотезу континуума на первом месте.

Элементы некоторых множеств можно упорядочить, т. е. указать такие признаки, согласно которым:

[1] «Fundamenta Mathematicae», т. V, стр. 147.

[2] D. Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathémathiques, Compte rendu du deuxième Congrès Jnternational des Mathématiciens.

1. Относительно любых двух элементов a и b можно всегда однозначно установить, какой из них последующий и какой предшествующий.

2. Если элемент a предшествует элементу b, а элемент b предшествует элементу c, то элемент a предшествует элементу c.

Например, множество рациональных чисел упорядочено по их величине.

Пусть M и N — какие-либо равномощные упорядоченные множества. Предположим, что удалось установить между элементами M и N взаимно-однозначное соответствие так, что когда m предшествует элементу m', то и соответственные им элементы n и n' находятся в том же взаимоотношении, т. е. n предшествует n'. Тогда множества M и N называются *подобными* друг другу. Если два множества подобны третьему, то они подобны друг другу. Подобные друг другу множества имеют одинаковый *порядковый тип*.

Особый интерес представляет один вид упорядоченных множеств, так называемые *вполне упорядоченные множества*.

Если в каждом подмножестве [1] упорядоченного множества M содержится первый элемент, то множество M называется вполне упорядоченным. Например, множество натуральных чисел в их обычном порядке

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

есть множество вполне упорядоченное.

Порядковые типы вполне упорядоченных множеств Кантор назвал *порядковыми числами* и, в частности, когда множество бесконечно, — *трансфинитными порядковыми числами*.

Каждое конечное множество может быть упорядочено только по одному, ему присущему, порядковому типу. Порядковый тип конечного множества может быть выражен натуральным (ординальным) числом. Множество натуральных чисел образует первый класс порядковых чисел. Иное соотношение вещей наблюдается при рассмотрении бесконечных множеств. Вполне упорядоченное множество можно переупорядочивать бесчисленными способами так, что оно остается вполне упорядоченным. Например, счетную последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

можно представить так

$$a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots a_1.$$

[1] Конечно, исключая пустое подмножество.

Как первая, так и вторая последовательности представляют вполне упорядоченные счетные множества. Но они не подобны, следовательно им отвечают различные порядковые трансфинитные числа. Порядковое число множества $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ или, что то же, порядковое число множества $1, 2, \ldots, n, \ldots$, принято обозначать символом ω. Второе множество $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots a_1$ имеет порядковое число $\omega+1$. Множество $a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots a_1, a_2$ имеет порядковое число $\omega+2$. Таким путем удается построить второй класс порядковых чисел:

$$\omega, \omega+1, \cdots, \omega+n, \cdots \omega 2, \omega 2+1, \cdots \omega^2, \cdots \omega^\omega, \ldots .$$

Кантор подразделил порядковые числа на классы. К первому числовому классу он отнес все конечные порядковые числа, ко второму — все трансфинитные порядковые числа, соответствующие вполне упорядоченным счетным множествам. Кантор показал существование и таких порядковых чисел, которые соответствуют вполне упорядоченным множествам более высокой мощности.

Мощность множества чисел первого класса Кантор обозначил символом $\aleph_0$ (алеф — нуль); соответственно этому $\aleph_1$ (алеф — один) стал обозначать мощность множества чисел второго класса. Вообще, $\aleph_\alpha (\alpha < \omega)$ обозначает мощность, множества чисел $\alpha+1$ класса.

Изучая алефы, Кантор показал, что для них можно доказать *общие* теоремы арифметики кардинальных трансфинитных чисел. Так, для алефов справедлива трихотомия, всегда $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^2$ и т. п. В противоположность арифметике кардинальных трансфинитных чисел арифметика алефов может быть развита во всей общности. Кроме того, Кантору удалось показать, что $\aleph_1 > \aleph_0$, причем $\aleph_1$ представляет мощность фактически ближайшую к $\aleph_0$ в том смысле, что между ними не может существовать мощность вполне упорядоченного множества. После развития арифметики алефов стал вырисовываться путь, по которому можно было пытаться итти к построению общей арифметики кардинальных трансфинитных чисел. *Надо было пытаться доказать, что каждое множество может быть представлено в форме вполне упорядоченного множества.* Действительно, если бы это удалось сделать, мощность каждого множества была бы алефом, и, следовательно, арифметика кардинальных трансфинитных чисел совпала бы с арифметикой алефов. Кроме того, если бы удалось упорядочить континуум, то отсюда следовало бы соотношение $c \geqslant \aleph_1$; если бы удалось доказать ложность соотношения $c > \aleph_1$, тем самым

была бы решена и гипотеза континуума. Однако, несмотря на все усилия, Кантор не смог решить проблему полного упорядочивания любого множества. В этом направлении заслуживающие внимания результаты были получены позднее.

§ 3. ПАРАДОКСЫ И ПРОТИВОРЕЧИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

На теории множеств строится все здание современной математики. Однако еще при жизни Кантора в теории множеств были обнаружены парадоксы и противоречия. Несмотря на то, что на их преодоление математики обратили особое внимание, их работа не увенчалась успехом; со временем число парадоксов не уменьшилось, а увеличилось. Больше того, *оказалось, что трудности, обнаруженные в теории множеств, имеют место и в самой формальной логике. Обнаружили, что формальная логика не всегда применима к бесконечным множествам.*

Здесь мы рассмотрим два наиболее типичных примера парадоксов и противоречий.

Рассмотрим множество *всех* множеств N. Известно, что множество всех подмножеств *любого* множества P имеет мощность, бóльшую мощности P. Стало быть, если S есть множество всех подмножеств множества N, то мощность S *больше* мощности N. С другой стороны, можно рассуждать и так: множество N есть множество *всех* множеств, следовательно, каждое множество, в частности и множество S, является его подмножеством. Но мощность подмножества не больше мощности множества, следовательно, мощность S *не больше* мощности N. Мы пришли к противоречию.

О некоторых множествах можно сказать, что они *содержат самих себя как элемент*; таково, например, множество всех множеств. Разделим все множества на два класса. К первому классу отнесем все те множества, которые не содержат самих себя как элемент. Ко второму классу, наоборот, отнесем все оставшиеся множества, т. е. те, которые содержат самих себя как элемент. Рассмотрим первый класс множеств. Этот класс множеств, в свою очередь, является некоторым множеством N, а потому принадлежит к первому или ко второму классу.

Допустим, что множество N принадлежит к первому классу. Первый класс — это класс множеств, каждое из которых не содержит самого себя как элемент. Но если N принадлежит к первому классу, то, так как множество N есть множество *всех* множеств первого класса, оно должно содержать и себя как элемент. *Итак, если множество N не содержит самого*

себя как элемент, то оно содержит самого себя как элемент. Мы пришли к противоречию, следовательно, нельзя предполагать, что множество N принадлежит к первому классу.

Предположим теперь, что множество N принадлежит ко второму классу, т. е. содержит самого себя как элемент. Но элементами множества N являются только множества, не содержащие самих себя как элемент. Следовательно, *если N содержит себя как элемент, то N не содержит самого себя как элемент.* Мы опять пришли к противоречию и вынуждены признать, что *множество N не может ни принадлежать, ни не принадлежать к первому классу.*

Множество N оказывается, таким образом, объектом, к которому неприменим закон исключенного третьего. Закон исключенного третьего гласит: если A любая вещь и x любой признак, то всегда верно либо предложение «A обладает признаком x», либо предложение «A не обладает признаком x». Однако множество N противоречиво при условии признания за ним каждого из установленных двух взаимно противоположных признаков.

§ 4. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Было не мало попыток преодолеть трудности построения, парадоксы и противоречия теории множеств. Наиболее значительная из них — попытка Цермело аксиоматического обоснования теории множеств.

Цермело выставил *без обоснования* систему аксиом, в которых изложил основные свойства множеств [1]. Все остальные свойства множеств, изучаемые в теории множеств, Цермело пытается вывести (или установить возможность вывода) из своих аксиом.

Преодолеть противоречия и парадоксы теории множеств Цермело не сумел. Он шел по пути *ограничения* поля приложимости своей системы аксиом только такими множествами, которые не приводят к парадоксам и противоречиям; ясно, однако, что ограничение не эквивалентно преодолению.

Значительно лучшие результаты получил Цермело в направлении преодоления трудностей обоснования теории множеств. *Если принять систему аксиом Цермело, теория множеств получает достаточную общность.* Обусловливается это следующими причинами. В системе аксиом Цермело особо выделяется одна, теперь носящая его имя, аксиома. Аксиома Цермело утверждает:

[1] См. «Mathematische Annalen», т. 59 и 65.

если дано множество M, все элементы которого не пустые множества P, то можно выбрать в каждом из этих элементарных множеств P по одному элементу; совокупность выбранных элементов образует новое множество N.

Опираясь на эту аксиому, Цермело доказал, что всякое множество может быть представлено в форме вполне упорядоченного множества, т. е. что мощность любого множества есть алеф. Как указывалось выше, этот факт обеспечивает возможность построения арифметики кардинальных трансфинитных чисел во всей общности. Достаточно сказать, что аксиома Цермело позволяет решить проблему трихотомии и дает обоснование трансфинитной индукции. Только гипотеза континуума остается попрежнему загадкой; вместе с Цермело мы можем утверждать, что мощность континуума есть алеф, но какое место на шкале алефов занимает c — не известно. К этому можно только прибавить, что доказательства эквивалентности некоторых форм гипотезы континуума также опираются на аксиому Цермело.

Больше десяти лет с момента опубликования приложения аксиомы Цермело в основном ограничивались областью теории функций действительного переменного. Кроме указанных, можно был бы, например, упомянуть приложения аксиомы Цермело в теории точечных множеств и в частности в теории измеримых множеств.

В 1917 г. Серпинский опубликовал мемуар, посвященный исследованию значения аксиомы Цермело в математике [1]. Перечислив многочисленные приложения аксиомы Цермело в теории функций действительного переменного, Серпинский указал, что эта аксиома играет большую роль и в классическом анализе.

Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного, определенная в интервале (a, b). Мы говорим, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 этого интервала *в смысле Коши*, если для каждого положительного числа ε существует положительное число δ, такое, что неравенство

$$|x - x_0| < \delta$$

влечет за собой неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

[1] «Математический сборник», т. XXXI, ч. I.

Мы говорим, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 *в смысле Гейне*, если для каждой последовательности x_n чисел интервала (a, b) равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

влечет за собой равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Серпинский показал, что эквивалентность определений непрерывности функций в точке, по Коши и Гейне, может быть доказана только с помощью аксиомы Цермело.

После 1920 г. поле приложений аксиомы Цермело значительно расширилось. В классическом анализе можно указать на исследования Биркгофа систем дифференциальных уравнений, где он применял трансфинитную индукцию. Особенно важно указать на теорию линейных операторов, которую Адамар называет наиболее сильным методом исследований современной математики [1]. Теория линейных операторов развивается на базе *общего* учения о множествах и пользуется аксиомой Цермело для установления некоторых важнейших своих предложений. Широкое поле применениям аксиомы Цермело дает современная алгебра и топология.

Таким образом, необоснованный отказ от аксиомы Цермело означает ограничение поля исследований и результатов ведущих математических дисциплин.

§ 5. ТРУДНОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С АКСИОМОЙ ЦЕРМЕЛО

Своеобразие аксиомы Цермело отчасти заключается в том, что она не только является орудием отыскания новых математических фактов и придает известную общность учению о множествах, но и *углубляет* трудности обоснования математики.

Как бы ни пытался Цермело ограничить поле приложимости своей аксиоматики, но его аксиома говорит о *любых* множествах, следовательно, предполагает (и обосновывает) концепцию общего, ничем не ограниченного учения о множествах. Тем самым *принятие аксиомы Цермело означает необходимость считаться с парадоксами теории множеств* (что, впро-

[1] См. например *S. Banach*, Théorie des opérations linéaires, Варшава 1932.

чем, является уделом и других попыток аксиоматизировать теорию множеств).

Вторая трудность состоит в том, *что, рассматривая вполне определенные множества, с помощью аксиомы Цермело возможно доказать существование множеств, неопределимых в смысле Кантора*. Вот пример.

Рассмотрим все функции действительного переменного x, определенные на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ и не равные на этом интервале тождественно нулю. Разделим эти функции на пары, относя в одну пару те две функции, которые отличаются только знаком. По аксиоме Цермело существует множество M, включающее по одной, и только одной, функции каждой пары.

Следовательно, согласно аксиоме Цермело можно утверждать существование множества M функций действительного переменного x, определенных на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ и не равных на этом интервале тождественно нулю, такого, что:

a) каковы бы ни были функции f_1 и f_2 множества M, всегда

$$f_1 + f_2 \neq 0,$$

b) какова бы ни была функция φ, определенная на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ и не равная на нем тождественно нулю, существует одна, и только одна, функция множества M такая, что либо

$$f + \varphi = 0, \text{ либо } f - \varphi = 0.$$

Однако множество M неопределимо в смысле Кантора, так как мы не можем сказать о любой $\varphi(x)$, подчиняющейся выставленным условиям, принадлежит ли она M или не принадлежит [1].

Третья трудность состоит в том, что с помощью аксиомы Цермело часто возможно определить *класс множеств, в то время как ни одного объекта этого класса определить (различить) не удается*. Например, согласно аксиоме Цермело существует класс неизмеримых множеств. Однако до сих пор никто не смог дать (построить) индивидуального примера неизмеримого множества.

Чтобы убедиться в том, что из аксиомы Цермело следует существование неизмеримых множеств, можно рассуждать так [2]:

[1] См. *W. Sierpiński*, Leçons sur les nombres transfinis, Paris 1928, p. 109.

[2] См. *Лебег*, Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, 1934 г, стр. 300.

Пусть C окружность, длины 1 и α какая-либо точка этой окружности. Обозначим через S_α множество всех точек окружности C, отстоящих от α на дуговое расстояние, соизмеримое с единицей. Очевидно, что S_α есть счетное множество.

Пусть β точка окружности C, отличная от α. Если S_β есть множество всех точек окружности C, отстоящих от β на дуговое расстояние, соизмеримое с единицей, то имеются только две возможности:

1) S_α и S_β не имеют общих точек, т. е. $S_\alpha S_\beta = 0$,
2) S_α и S_β тождественны, т. е. $S_\alpha = S_\beta$.

$S_\alpha S_\beta = 0$ тогда, когда дуга $(\alpha\beta)$ иррациональна;
$S_\alpha = S_\beta$, если, напротив, дуга $(\alpha\beta)$ рациональна.

Таким образом, каждая точка γ окружности C, такая, что дуга $(\alpha\gamma)$ иррациональна, определяет множество S_γ, построенное так же, как и множества S_α и S_β. Следовательно, окружность C может быть разбита на совокупность взаимно не перекрывающихся множеств S. Очевидно, что эта совокупность несчетная.

Согласно аксиоме Цермело, существует множество N, содержащее по одной точке каждого множества S; это множество несчетное.

Будем поворачивать около центра окружность C на углы, соизмеримые с π. При поворотах множество N будет занимать на окружности C положения N', N'', ..., $N^{(n)}$, ..., представляющие новые множества, не пересекающиеся попарно и конгруэнтные с множеством N. Множества N', N'', ..., $N^{(n)}$, ... вместе с N целиком заполняют окружность C, т. е.

$$C = N + N' + N'' + \cdots + N^{(n)} + \cdots .$$

Если бы множество N было измеримым и имело меру $\lambda \geqslant 0$, тогда бы мера окружности C, т. е. 1, равнялась сумме мер всех N, т. е.

$$1 = \lambda + \lambda + \cdots + \lambda + \cdots ,$$

что невозможно. Следовательно, множество N не измеримо.

§ 6. ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

Исследования в области теории множеств поставили математику перед тремя основными трудностями обоснования:

1. Теория множеств является фундаментом всей современной математики, но сама не обоснована в той степени, какой теперь характеризуется каждая математическая дисциплина.

2. В теории множеств обнаружены парадоксы и противоречия, преодолеть которые до сих пор не удалось.

3. Парадоксы и противоречия теории множеств заставили поставить вопрос о границах приложимости законов формальной логики в математике.

Иначе говоря, в конце XIX столетия математика вступила в период *ломки* своих основных посылок.

Приведенное выше доказательство существования неизмеримых множеств вместе с перечисленными трудностями поставило новую проблему, так называемую *проблему существования в математике*.

Раньше математики рассуждали просто: если исходные предпосылки верны и если вести доказательство согласно законам формальной логики, то и полученный результат также будет верен. Формальная логика рассматривалась математиками как непогрешимая наука об универсальных способах мышления и доказательства. Благодаря этому большинство математиков считали истинными как эффективные, так и неэффективные доказательства существования математических объектов. Когда, например, Дирихле впервые применил в теории чисел метод неэффективных доказательств существования, этот метод не вызвал возражений. В конечном счете все это обусловливалось тем, что математики не отрицали *объективной* ценности своих теорий.

После выявления названных трудностей, в особенности после опубликования работ Цермело, мнение математиков о неэффективных доказательствах существования резко изменилось. Чтобы выяснить по существу изменение этих мнений, разберем два примера, которые помогут нам лучше выяснить разницу между так называемыми эффективными и неэффективными доказательствами существования.

Докажем, что каковы бы ни были натуральные числа p_1, p_2, ..., p_n, существует натуральное число P, взаимно-простое с каждым из чисел p_1, p_2, ..., p_n.

Рассмотрим число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$; при делении на любое из чисел p_1, p_2, ..., p_n это число дает в остатке 1, следовательно, оно взаимно-простое с каждым из чисел p_1, p_2, ..., p_n. Итак, число P существует.

Это доказательство эффективное. Мы доказали существование числа P тем, что *показали*, как с помощью обычных арифметических действий *найти* это число. Всякое эффективное доказательство тем и характеризуется, что оно позволяет индивидуально охарактеризовать (вычислить, определить, построить и т. п.) объект, существование которого доказывают.

Число называется алгебраическим, если оно является корнем какого-либо алгебраического уравнения с рациональными коэфициентами. Например, число $\sqrt{2}$ алгебраическое, так как оно является корнем уравнения $x^2-2=0$. Напротив, число, не удовлетворяющее никакому алгебраическому уравнению с рациональными коэфициентами, называется трансцендентным числом. Докажем, следуя Кантору, существование трансцендентных чисел.

Известно, что множество всех алгебраических чисел счетно, в то время как множество всех вещественных чисел обладает мощностью континуума. Если бы трансцендентные числа не существовали, каждое вещественное число было бы алгебраическим, и, следовательно, мощность всех вещественных чисел была бы счетной, что невозможно. Чтобы избегнуть противоречия, остается принять, что трансцендентные числа существуют.

Это доказательство неэффективное, так как *с его помощью мы не можем указать ни одного трансцендентного числа*. В доказательстве Кантора есть еще одна существенная особенность: *оно базируется на принципе исключенного третьего*.

Учитывая различия между эффективными и неэффективными доказательствами существования, математики начали рассуждать так: каждое эффективное доказательство всегда дает средство построения *примера* объекта, существование которого доказывают. Эффективное доказательство дает объект в действительности, а не в возможности, почему и нет необходимости сомневаться в истинности такого доказательства. Неэффективные доказательства не только не дают средств построения объекта, но и обычно используют принцип исключенного третьего, что, как показывают парадоксы и противоречия теории множеств, видимо, не всегда возможно. Иначе говоря, всякое неэффективное доказательство дает объект в возможности, а не в действительности, причем существование такого объекта весьма сомнительно. Особенно критически отнеслись к аксиоме Цермело. Аксиома Цермело не обоснована, доказательства Цермело неэффективны, в то же время многие следствия этой аксиомы крайне парадоксальны. *Можно ли*, спрашивали математики, *считать существующим объект, который мы не умеем построить, множество, ни одного элемента которого мы не умеем указать*? Эта *математическая* проблема, естественно, связывалась с философскими вопросами: *каков предмет математики, в чем гарантия истинности каждого факта математики*.

Проблема существования — для математики не новость. Не раз математики спорили о том, что можно считать существующим в математике. Еще Евклид считал существующими в математике только те объекты, которые можно построить с помощью проведения окружностей и прямых (т. е. посредством циркуля и линейки). В XVIII столетии математики спорили о том, можно ли считать функцию существующей, если она не задана определенным законом. Новое в современной постановке проблемы существования состоит только в том, что она много шире, глубже, захватывает вопросы обоснования математики и даже вопросы логики.

Случайно ли в математике возникали вопросы, связанные с существованием математических объектов? Нет, не случайно. Необходимо различать два органически связанных вида понятий: понятие математического объекта и понятие отношения, в котором выступают эти объекты. Например, числа — это объекты; сложить, умножить и т. п. — это названия отношений (в данном случае операций), в которых могут выступать числа. Точки, прямые и плоскости — это объекты, так называемые элементы геометрии; параллельный, непрерывный и т. п. — это названия отношений, в каких могут выступать элементы геометрии. При аксиоматическом построении математической дисциплины полное описание отношений дается аксиомами. Все наше внимание направлено на изучение математических объектов: множеств, чисел, поверхностей и т. п. в их взаимоотношениях, так как сами отношения выражают свойства объектов. Но не всегда изучение математического объекта проводится при наличии этого объекта. Каждая аксиоматически построенная математическая дисциплина предполагает данной какую-либо ее интерпретацию, т. е. предполагает данной некоторую область объектов; тогда эта дисциплина непротиворечива, является теорией. Имея некоторую непротиворечивую систему аксиом и изменив ее, мы можем искать объекты, удовлетворяющие измененной системе аксиом. До тех пор пока мы не найдем таких объектов, измененная нами система аксиом будет гипотетичной; чтобы она стала теорией, надо дать объекты, ей подчиняющиеся и дать их эффективно. Следовательно, доказательство непротиворечивости любой системы аксиом всегда связано с *эффективным* доказательством существования некоторой области объектов, являющейся для этой системы аксиом интерпретацией. Но доказательства непротиворечивости не так-то легки, как это может показаться. Пусть кто-либо попытается доказать непротиворечивость системы аксиом арифметики

натуральных чисел, расширенной за счет присоединения положения, известного под названием великой теоремы Ферма. Кроме того, когда система аксиом обоснована, всегда существует возможность неэффективных доказательств существования, которые базируются на этой системе аксиом. Больше того, эта возможность существует и тогда, когда мы исходим от необоснованной системы основных посылок. Именно тогда, когда основные посылки математики не обоснованы, когда идет ломка основных посылок, основанные на этих посылках неэффективные доказательства существования создают возможность возникновения проблемы существования. Эта возможность превращается в действительность, если число неэффективных доказательств велико и если, вдобавок, они обладают большим удельным весом. Все это прекрасно подтверждает теория множеств, с основанным на ее идеях современным аксиоматическим методом.

Как мы должны отнестись к проблеме существования? Не лучше ли ограничить себя в средствах, отбросить неэффективные доказательства существования, остановиться на известных эффективных? Материалист-математик не может выбросить за борт неэффективные доказательства существования, не может ограничивать себя в средствах исследования. Как и прочие науки, математика изучает действительный мир, именно его количественные отношения и пространственные формы; этот факт подтвержден многовековой практикой человечества. Поэтому в *математике имеет право на существование только то, что правильно отражает количественные отношения и пространственные формы материального мира.* Как и другие науки, математика знает только один критерий истины своих теорий — именно критерий практики. Если мы говорим о критерии непротиворечивости, то под этим всегда понимаем *выполнимость*, т. е., в конечном счете, проверенную на практике интерпретацию. Познание в математике не идет по готовым схемам метафизиков, а движется от *неполного* знания, к знанию *полному*. Исходя от этого единственно правильного, диалектико-материалистического понимания предмета математики, можно сказать, что мы получаем полное доказательство существования математического объекта только тогда, когда наши рассуждения проверены на практике, что чаще всего возможно сделать, если дан *пример* этого объекта. Никто из математиков (кроме «ортодоксальных» интуиционистов) не станет сомневаться в истинности, т. е. в существовании числа $P=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n+1$, ибо практика человека в течение многих веков подтвердила истинность арифметики на-

туральных чисел. Напротив, неэффективное доказательство не дает нам таких возможностей проверки, ибо, не имея объекта, не изучив подробно его свойств, мы не можем непосредственно проверить его истинность. Именно потому, что эффективные доказательства дают примеры, которые можно проверить на практике, а неэффективные таких примеров не дают, мы должны признать, что эффективные доказательства существования позволяют нам познать предмет исследований глубже, всестороннее, чем доказательства неэффективные. Тем более должны мы быть осторожны, когда основные посылки неэффективных доказательств не обоснованы, когда приложимость законов логики к бесконечным множествам находится под сомнением.

Однако отсюда не следует необходимость отказа от неэффективных доказательств существования. История математики показывает, что многие неэффективные доказательства существования впоследствии подтверждались соответствующими построениями. Кроме того, неэффективные доказательства существования, хотя и в гипотетической форме, указывают на возможные связи между объектами. Например, неэффективное доказательство существования трансцендентных чисел освещает место этих чисел среди чисел вещественных с новой стороны так, как это не сможет сделать эффективное доказательство трансцендентности того или иного данного числа (π, e и т. п). Неэффективное доказательство существования дает нам объект в возможности, а не в действительности. Чтобы эта возможность имела под собой базу, исходные предпосылки должны быть обоснованы, равно как должна быть доказана приложимость законов логики к этим посылкам. Чтобы реализовать возможность, дать объект в действительности, нужно так *развить* соответствующие методы, чтобы было можно этот объект построить или определить. Существенно подчеркнуть, что речь идет о *развитии* методов построения или определения объектов. Мы теперь не удовлетворимся евклидовским циркулем и линейкой. Евклид сказал бы: помощью циркуля и линейки нельзя построить квадрат, равновеликий по площади данному кругу, следовательно такой квадрат не существует. Мы же теперь скажем иначе: с помощью циркуля и линейки эту задачу решить нельзя, но ее можно эффективно решить другими, нами обоснованными средствами. Средства построения постоянно расширяются, благодаря чему несуществующее может превращаться в существующее. Короче говоря, неэффективное доказательство дает нам *неполное* знание объекта, и математики должны стремиться

дать эффективное доказательство, сделать наше знание об объекте полным. Если возможность неэффективных доказательств существования обоснована, нет никаких оснований их отвергать. Если она не обоснована, надо стараться ее обосновать или опровергнуть, тем самым опровергая и разбираемые неэффективные доказательства. Таким образом, нельзя отрицать трудности, связанные с парадоксами теории множеств, с аксиомой Цермело, с вопросом о границах приложимости формальной логики в математике. Сама аксиома Цермело является гипотезой. Но в то же время ни один материалист-математик не сможет считать решением выбрасывание этих трудностей.

На каких путях, помощью каких средств можно было пытаться преодолеть трудности обоснования математики, решить проблему существования?

Надо было начинать с самого начала, с *преодоления* трудностей теории множеств, с выяснения границ приложимости формальной логики в математике, с расширения средств построений. Решение этих вопросов нужно было искать на *расширенной базе математических фактов*, пополненной за счет *новых* фактов математических исследований. Пример теории множеств показывает, что в конечном счете разработка обоснования математики сводится к развитию таких основных дисциплин, методы которых плодотворно проникают всю математику, в терминах которых строится большинство математических дисциплин. В фактах математики надо было усмотреть: 1) или направление необходимой перестройки теории множеств и ее методов 2) или, если такая перестройка невозможна, направление разработки математических дисциплин, способных заменить теорию множеств, т. е. стать фундаментом всей современной математики. На фактах математики нужно было выяснить границы приложимости формальной логики, законность гипотез и неэффективных доказательств существования. Проблема преодоления трудностей обоснования математики есть в первую очередь математическая проблема. Но при решении этой проблемы больше чем когда-либо важна роль *научной* философии. Можно ответить на вопрос «что значит существовать в математике», но для этого нужно знать *предмет* исследований математики. Только *научная* философия способна помочь оценке конкретных фактов математики, выяснить возможность неэффективных доказательств существования, допустимость гипотез в математике. Вот почему в конце XIX и начале XX столетий в среде математиков пробудился живой интерес к философии: с помощью философии математики пытались преодолеть трудности роста и обоснования современной математики. Интерес к философии стимулировался еще тем, что до сих пор в фактах математики не удалось найти новых средств преодоления трудностей обоснования математики.

До конца последовательной, единственно научной философией является диалектический материализм — неотъемлемая составная часть марксизма-ленинизма. Учение Маркса—Энгельса — Ленина — Сталина — результат переработки всего лучшего, что создала передовая мысль человечества в философии, политической экономии, теории социализма, в естествознании и во всех областях человеческой культуры. Марксизм-ленинизм дает людям «цельное миросозерцание, непримиримое ни с каким суеверием, ни с какой реакцией, ни с какой защитой буржуазного гнета»[1]. Правильность марксизма-ленинизма подтверждена всем ходом истории, революционной борьбой мирового пролетариата, практикой построения социализма в СССР, подтверждена всем ходом развития науки. В «Анти-Дюринге» и в «Диалектике природы» Энгельс на многочисленных фактах показал, что материалистическая «диалектика является для современного естествознания самой правильной формой мышления, ибо она одна представляет аналог и, значит, метод объяснения происходящих в природе процессов развития для всеобщих связей природы, для переходов от одной области исследования к другой»[2]. Марксизм-ленинизм дает единственно правильное толкование роли гипотез в науке, возможности и действительности, единичного и всеобщего и т. п. Подлинно советские ученые все больше и больше используют диалектический материализм как орудие научных исследований. В качестве примера можно указать на исследования академиков Лысенко и Марра.

Казалось бы, что научные данные марксизма-ленинизма должны были убедить всех математиков конца XIX и начала XX столетий в необходимости попытки привлечения диалектического материализма к решению проблем обоснования. Но этого не случилось. Наоборот, *буржуазные философствующие математики стали искать средства решения в данных идеалистической философии, стали бороться против материализма в математике.*

---

[1] *Ленин*, Маркс, Энгельс, марксизм, 1936, стр. 65.
[2] *Маркс* и *Энгельс*, Соч., т. XIV, стр. 337—338.

Маркс неоднократно указывал: «господствующими идеями данного времени всегда были только идеи господствующего класса»[1]. Марксизм-ленинизм объявил беспощадную борьбу против капитализма, научно доказал неизбежность гибели капитализма, возможность и необходимость построения бесклассового, коммунистического общества. Поэтому марксизм-ленинизм вызвал к себе величайшую ненависть *всех* представителей казенной и так называемой «либеральной» буржуазной науки. В особенности яростно выступали против марксизма философы-идеалисты. С тех пор как буржуазия перестала быть революционным классом, ее официальной, господствующей философией стал идеализм. Современная буржуазная философия — это идеалистическая философия эпохи империализма, эпохи умирающего капитализма. Этим объясняется ее *реакционность*, *антинаучность и метафизичность*. Современная буржуазная философия считает своей главной задачей борьбу против мировоззрения революционного пролетариата, против марксизма-ленинизма, обоснование «незыблемости» современного капитализма, обоснование поповщины. Крикливость, вычурность, игра в словечки — вот обычный наряд, за которым старается скрыть свою *пустоту* и *реакционность* современная буржуазная философия. Особенно реакционной стала буржуазная философия за последние годы, годы кризиса капитализма, с одной стороны, и невиданного расцвета страны социализма — СССР — с другой. В качестве примера можно назвать варварскую расовую «философию» германского фашизма, отбрасывающую все ценное, что когда-либо открыло человечество[2]. Находясь под повседневным влиянием реакционной идеалистической философии, не зная диалектического материализма, многие буржуазные математики стали следовать в философских вопросах не за материализмом, а за идеализмом. Отбросив материализм, борясь против него, философствующие математики конца XIX и начала XX столетий пытались преодолеть трудности обоснования математики с помощью современных им философских идеалистических систем. С конца XIX столетия появляются различные философские течения внутри математики. Теперь в буржуазных странах наиболее развиты следующие из этих течений: логистика, формализм, интуиционизм, конвенционализм и эффективизм[1]. Первые два течения подходят к вопросам обоснования математики с позиций объективного идеализма, последние — с позиций субъективного идеализма. Главенствующее положение занимают формализм (Гильберт) и интуиционизм (Брауэр и Вейль). Однако ни одно из названных течений буржазной философии математики не справилось со стоящими задачами; напротив, трудности только углубились. Современные буржуазные математики справедливо говорят, что *их* математика переживает кризис. Это вполне справедливо: реакционная идеалистическая философия завела современных буржуазных математиков в тупик, из которого они выбраться не могут. И понятно почему: *без научной философии нельзя решить проблемы обоснования математики; современная буржуазная философия не дает научных методов, запутывает, углубляет трудности роста современной математики, приводит ее к кризису.*

---

[1] *Маркс* и *Энгельс*, Сочинения, т. V, стр. 500.

[2] С одним только ограничением: данные науки признаются фашистами ровно настолько, насколько они могут служить целям войны, в первую очередь войны против СССР.

[1] В последние годы фашистские мракобесы (и мы-де не лыком шиты!) тоже стали «разрабатывать» вопросы обоснования математики. Здесь больше всего «отличился» Бибербах. За «заслуги» в этой области антифашистски настроенные ученые «попросили» Бибербаха покинуть редколлегию известного журнала «Compositio Mathematica».

ГЛАВА II

КОНВЕНЦИОНАЛИЗМ И ЭФФЕКТИВИЗМ В МАТЕМАТИКЕ

§ 1. КОНВЕНЦИОНАЛИЗМ

Среди названных выше философских течений в буржуазной математике для нас особо интересен *конвенционализм, являющийся одной из разновидностей махизма в математике*. Основателем конвенционализма является один из крупнейших математиков конца XIX и начала XX столетий — А. Пуанкаре. Конвенционализм оказал большое влияние на развитие эффективизма и во многих пунктах с ним идентичен. Эффективизм есть конвенционализм, в котором в субъективно-идеалистическом смысле несколько исправлено конвенционалистское учение о критерии истины в математике, более замаскированы противоречия этого учения. Следовательно, в конечном счете эффективизм также представляет собой одну из разновидностей махизма в математике. Справедливость этих утверждений будет доказана дальше. Здесь мы рассмотрим содержание конвенционализма, поскольку это необходимо для анализа эффективизма.

Махизм представляет собою непоследовательную, путаную разновидность берклеанства: «...исходный пункт и основная посылка философии эмпириокритицизма есть субъективный идеализм. Мир есть наше ощущение, вот эта основная посылка...» [1]. Тела суть «комплексы ощущений»; мы вносим закономерность в природу; обективно лишь то, что общепризнано. Все эти субъективно-идеалистические утверждения Мах защищал весьма непоследовательно. «Собственная теория Маха, — писал Ленин, — есть субъективный идеализм, а когда нужен момент объективности, — Мах без стеснения вставляет в свои рассуждения посылки противоположной, т. е. материалистической теории познания» [2]. Ленин доказал, что махизм запутывает, усложняет трудности развития естествознания, приводит естествознание к кризису. Ленин доказал, что классовая роль махизма «всецело сводится к прислужничеству фидеистам в их борьбе против материализма вообще и против исторического материализма в частности» [1]. Точно так же Ленин доказал, что философия Пуанкаре во всех основных положениях идентична с махизмом; следовательно, ленинская критика махизма полностью относится и к философии Пуанкаре.

[1] *Ленин*, Соч., т. XIII, стр. 76.
[2] Там же, стр. 52.

В своем первом крупном философском сочинении [2] Пуанкаре пытается описать причины, побудившие его заняться вопросами философии. Долгие годы, указывает Пуанкаре, широкая публика и даже ученые были убеждены в абсолютной точности науки. Если ученые иногда и ошибались, их ошибки объясняли неправильным применением правил логики. Особенно непогрешимой казалась математика — утверждение абсолютной точности математики было тривиальной истиной. Истины науки считались присущими не только нам, но и природе.

Описываемое Пуанкаре мировоззрение называется *стихийным материализмом*. Главное в этом мировоззрении заключается в признании подтвержденного историей науки и практикой человечества факта, что наука изучает законы материальной, существующей *вне* сознания человека действительности. Даже и теперь большинство буржуазных ученых *в практике* научных исследований придерживается стихийно материалистических воззрений.

По мнению Пуанкаре, современная наука опровергает безграничную веру в абсолютную точность своих положений. Сила удара по традиционным (т. е. материалистическим) воззрениям велика именно потому, что ранее считавшиеся наиболее точными науки — математика и физика — поставили под сомнение точность своих положений. В физике — крушение основных принципов, принципа сохранения массы, энергии и т. п. В математике — парадоксы и противоречия, сомнения в безграничной приложимости формальной логики. Возник вопрос, достаточно ли прочны все эти научные теории, и «явилась мысль, что при малейшем дуновении они могут рухнуть». Многие философы пришли к полному отрицанию объективной ценности науки, стали доказывать, что наука сводится к правилам действия, порожденным фантазией ученых.

[1] Там же, стр. 292.
[2] Наука и гипотеза, русск. пер. 1904 г.

Таким образом, Пуанкаре старается убедить читателей в том, что только трудности роста науки заставили буржуазных философов отвергнуть материализм. Но это совсем не верно. В «Материализме и эмпириокритицизме» Ленин доказал, что отказ от диалектического материализма *не* следует из данных современной науки. Современная наука (в том числе физика и математика) показала только несостоятельность идеализма и *метафизического* материализма. Новейшие данные науки *подтвердили диалектический* материализм, показали, что теории, законы и т. п. суть *приближенные копии*, *снимки* с материальной действительности. Ленин доказал, что выход из кризиса физики возможен только на путях диалектического материализма. Как уже указывалось, отказ буржузных философов от материализма объясняется господством в буржуазных странах реакционной идеалистической философии, их незнанием диалектики. В Советском Союзе наука находится в стадии все возрастающего развития. Советская наука развивается не без борьбы с классово чуждыми учениями, не без борьбы различных направлений, не без критики. Однако настоящие советские ученые не пускаются в идеалистические спекуляции, а стараются с позиций диалектического материализма подойти к преодолению трудностей роста науки.

Пуанкаре присоединил свой голос к голосу большинства буржуазных философов, стал одним из наиболее ярых махистов. По мнению Пуанкаре, ломка основных принципов науки доказывает, «что эти принципы не какие-нибудь копии, снимки с природы, не изображения чего-то внешнего по отношению к сознанию человека, а продукты этого сознания» [1]. Законы природы — условности, символы, создаваемые учеными ради «удобства». Если законы оказываются неудобными, их без сожаления можно заменить другими, «более удобными». Например, по мнению Пуанкаре, вопрос — является ли геометрия Евклида истинной — не имеет смысла. «Одна геометрия не может быть более истинна, чем другая; она может быть только *более удобна*. И вот, евклидова геометрия остается и останется наиболее удобной» [2], ибо она проще других геометрий. Не природа дает нам понятия пространства и времени, а мы даем их природе. Все это, по мнению Пуанкаре, доказывает, что вне сознания человека объективной реальности нет. «Все, что не мысль, — пишет Пункаре, — есть чистое ничто... сказать, что существует нечто иное, чем мысль, значило бы произнести утверждение, которое не может иметь смысла» [1]. «Объекты, вещи — это группы ощущений, скрепленные постоянной связью».

[1] *Ленин*, Соч., т. XIII, стр. 207.
[2] *Пуанкаре*, Наука и гипотеза, стр. 61.

Точно в таком же духе решает Пуанкаре и другие гносеологические вопросы. По мнению Пуанкаре, «объективно лишь то, что является тождественным для всех... Поэтому ничто не будет иметь объективной ценности кроме того, что может быть передано помощью речи, то-есть того, что понятно» [2]. Иначе говоря, в философии Пуанкаре признает критерий истины Беркли, т. е., как и все махисты, чисто субъективистски уничтожает объективную истину.

Из сказанного ясно, что основные гносеологические выводы Пуанкаре совпадают с основными посылками махизма. Отказ от материализма, в частности от стихийного материализма естествоиспытателей, переход на позиции субъективного идеализма — таков итог «объективных» размышлений Пуанкаре над трудностями роста современной науки.

Ленин неоднократно изобличал Маха в эклектизме. Когда Мах не мог «связать концы с концами», он часто обращался за помощью к материализму, в частности к материалистическому критерию истины. Еще в большей степени эклектична философия Пуанкаре. Изложенные выше основные гносеологические выводы Пуанкаре представляют *главное* направление его философии — это субъективный идеализм. Но ничто не мешает Пуанкаре спутывать основные положения материализма и идеализма. Действительно, если философ отстаивает субъективный идеализм, значит, он отрицает существование природы *вне* мышления человека. Такова элементарная истина философии. Именно эту истину Пуанкаре забывает чуть ли не на каждой странице своих философских сочинений. Читатель то и дело сталкивается с выражениями: «внешний мир», «реальность», «природа» и т. п. Интересно при этом отметить, что, подобно Маху, Пуанкаре часто говорит языком материалиста во имя... обоснования своих идеалистических выводов. В итоге получается такая эклектическая смесь, от которой с презрением отвернулись бы классики идеалистической философии, несмотря на то, что главная задача Пуанкаре — опровергнуть материализм и обосновать современными научными данными субъективный идеализм. Чтобы не быть голословными, выпишем здесь несколько утверждений Пуанкаре. «Мозг ученого — это маленький уголок вселенной» [3]. «Разум поль-

[1] *Пуанкаре*, Ценность науки, русск. пер. 1906 г., стр. 193—194.
[2] Там же, стр. 186.
[3] *Пуанкаре*, Наука и метод, русск. пер. 1910 г., стр. 18.

зуется своей творческой силой только тогда, когда опыт принуждает его к этому» [1]. Математика «не имеет единственной целью вечное созерцание своего собственного пупа; она приближается к природе, и раньше или позже она придет с ней в соприкосновение» [2].

Приведенные примеры — только цветочки, ягодки впереди. Только успел Пуанкаре изложить свои философские взгляды, как «реакционнейшая идеалистическая философия с определенно фидеистическими выводами сразу ухватилась за его теорию»[3]. Представитель этой философии Леруа рассуждал так: Пуанкаре говорит, что истины науки условны, следовательно, объективной истины нет; наука имеет только практическое значение, но поскольку и религия имеет практическое значение, постольку нет никаких данных отрицать религию. «А. Пуанкаре, — пишет Ленин, — устыдился этих выводов и в книге «Ценность науки» специально напал на них» [4]. К этому присоединилось еще одно, далеко не маловажное обстоятельство. Как и все махисты, Пуанкаре выбрасывает материю и критерий практики. Поэтому перед ним (как и перед всяким субъективным идеалистом) неизбежно возник вопрос: почему законы науки применимы к природе? В самом деле, если человек утверждает, что законы природы условны, не отражают реальности, а только правила действия, то непонятно, почему они применимы к природе. Пуанкаре был одним из крупнейших ученых своего времени и хотя сам был идеалистом, но понимал, что такое объяснение по меньшей мере ничего не объясняет и сводит науку до уровня игры [5]. Пуанкаре правильно заметил, что критиковать Леруа можно, только отстаивая объективность науки; поскольку же для него это имело самостоятельный интерес, Пуанкаре постарался объективность науки отстоять..., оставаясь на позициях субъективного идеализма. «Г. Леруа, — пишет Пуанкаре, — объявляет разум непоправимо бессильным лишь для того, чтобы уделить побольше места для других источников познания, например, скажем, для сердца, чувства, инстинкта, веры»... «Я не иду до конца: научные законы суть условности, символы» [6]; но мы создаем эти условные научные теории так, что они правильно описывают *отношения* между вещами, но не сами вещи. Если, несмотря на это, теория окажется негодной, мы ее заменим более удобной. Например, «у нас нет никакого средства удостовериться, что ощущение, которое я выражаю словом «красное», есть то же самое, которое связывается с этим словом у другого» [1]. «Поэтому, когда мы задаем вопрос: какова объективная ценность науки? то это не значит: открывает ли нам наука истинную природу вещей? — но это значит: открывает ли она нам истинные отношения вещей?» [2]. Эти отношения изучает наука. Столь категорически высказанные утверждения Пуанкаре «обосновывает» примерами, аналогичными вышеприведенному об ощущении красного.

Таким образом, суть «борьбы» Пуанкаре против Леруа весьма примитивна: *чтобы «спасти» объективность науки, Пуанкаре берклеанизирует Канта*. Для Пуанкаре «вещи — это группы ощущений, скрепленные постоянной связью»; познать вещи мы не можем, но можем познать их отношения. В дальнейшем нам не раз придется сталкиваться с подобным использованием Пуанкаре кантовского учения о непознаваемости вещей в себе и даже учения об априоризме как основы для защиты «объективности» науки. К каким противоречиям пришел Пуанкаре в силу такого соединения махизма с кантианством, мы также увидим в дальнейшем. Сейчас же отметим следующее. Как бы ни опирался Пуанкаре на Канта для защиты объективности науки, ему все же понадобилась теория отражения. Пуанкаре признал людей способными познавать отношения между вещами. Кроме того, разбирая вопрос о критерии объективности науки, Пуанкаре, стал на чисто материалистическую точку зрения. «Каков критерий объективности науки? Да тот же самый, — пишет Пуанкаре, — как и критерий нашей веры во внешние предметы. Эти предметы реальны, поскольку ощущения, которые они в нас вызывают (qu'ils nous font éprouver), представляются нам соединенными, я не знаю, каким-то неразрушимым цементом, а не случаем дня» [3]. «Что автор такого рассуждения, — пишет Ленин, — может быть крупным *физиком*, это допустимо. Но совершенно бесспорно, что брать его всерьез, как философа, могут только Ворошиловы — Юшкевичи. Объявили материализм разрушенным «теорией», которая при первом же

---

[1] *Пуанкаре*, Наука и гипотеза, стр. 39.
[2] *Пуанкаре*, Наука и метод, стр. 238.
[3] *Ленин*, Соч., т. XIII, стр. 238.
[4] Там же.
[5] См. *А. Пуанкаре*, Ценность науки, русск. пер. 1906 г., стр. 152—3.
[6] Цит. по *Ленину*, Соч., т. XIII, стр. 238.

[1] *Пуанкаре*, Ценность науки, русск. пер. 1906 г., стр. 184.
[2] Там же, стр. 187.
[3] Цит. *по Ленину*, Соч., т. XIII, стр. 239. См. также Ценность науки, русск. пер. стр. 189.

натиске фидеизма *спасается под крылышко материализма*! Ибо это чистейший материализм, если вы считаете, что ощущения вызываются в нас реальными предметами и что «вера» в объективность науки такова же, как «вера» в объективное существование внешних предметов» [1].

При рассмотрении философии Пуанкаре всегда надо иметь в виду, что ее содержание является эклектической смесью, в которой ведущую роль играет субъективный идеализм.

Посмотрим теперь, как Пуанкаре пытался решать философские вопросы математики.

В философских вопросах математики Пуанкаре всемерно старался провести линию философии Беркли-Маха. Однако и здесь Пуанкаре смешивал идеализм с материализмом.

Везде и всюду Пуанкаре пытается доказать, что математика — продукт свободной деятельности человеческого ума. Чем больше удаляется творчество математика от «тирании» внешнего мира, восклицает Пуанкаре, тем лучшие результаты привносятся в сокровищницу математики. Однако математика не пустышка, не чистая условность. Верный своей «борьбе» за объективность науки, Пуанкаре сообщает, что, несмотря на совершенно произвольный характер своего происхождения, математика все же изучает отношения между предметами. Как совместить «совершенно произвольное» происхождение математики с тем, что она «все же» изучает отношения между предметами[2]. Ответ может быть один: за счет *противоречия*. Во имя «борьбы» за «объективность» науки Пуанкаре согласился на противоречие. Доказательства Пуанкаре свободного развития математики весьма кратки и, как две капли воды, похожи друг на друга. В основе его «доказательств» лежит махистски извращенное понимание опыта. Рассмотрим, например, математическое понятие непрерывности. «Сличая грубые данные наших чувств с тонким понятием математической непрерывности, мы, — пишет Пуанкаре, — должны признать их различие; следовательно, понятие непрерывности создано свободным мышлением, оно — рама, которую мы накладываем на природу». Точно такими же рассуждениями «доказывает» Пуанкаре условность аксиом геометрии и т. п. Структура всех таких рассуждений крайне «проста»:

1. Объективная реальность выбрасывается и заменяется ощущениями. С точки зрения махизма такое действие вполне естественно, так как для него объекты суть комплексы ощущений.

[1] *Ленин*, Соч., т. XIII, стр. 239.
[2] См. *Пуанкаре*, Наука и гипотеза, стр. 29.

2. Данные чувств сличаются с понятиями. Установив различие между ними, «умозаключают», что понятия не отражают природу (следовательно, опыт понимается в махистском смысле). После этого заключают, что математика—продукт чистого мышления и, больше того, что «все, что не мысль, есть ничто».

Логический круг всех таких рассуждений несомненен: сперва выбрасывают природу, критерий практики; базируясь на этом, ведут рассуждения и заключают, что... природы вне мышления человека нет. В этом логическом круге вращаются все аналогичные «доказательства» Пуанкаре: К их характеристике нелишне добавить одно замечание: Пуанкаре не только является субъективным идеалистом, но и не знает диалектики. Поэтому различие между объектами и понятиями для Пуанкаре является неоспоримым аргументом в пользу внеопытного происхождения понятий (в частности, понятий математики).

Если бы Пуанкаре не находился в плену у буржуазной идеологии и философии, он как крупный ученый, несомненно, не выбросил бы «за борт» материю и критерий практики. И тогда он должен был бы заключить, что наши научные теории и понятия — копии, приближенные, все улучшающиеся снимки с материальной действительности. Тогда бы Пуанкаре не понадобились половинчатые рассуждения об объективности математики, несмотря на ее «условный» характер. Он заключил бы, что математики не изучают качественного содержания предметов материального мира, но лишь количественные отношения между ними; поэтому для изучения наиболее общих законов математики можно заменять одни предметы другими, лишь бы только не менялась структура отношений. Это был бы единственно правильный, соответствующий современному состоянию математики, вывод о предмете ее исследований, избавляющий от лжи и путаницы субъективного идеализма в математике. К такому выводу Пуанкаре не раз приближался; достаточно вспомнить вышеприведенное его замечание о приближении математики к природе. Но идеализм и метафизика задушили эти единственно правильные философские замечания Пуанкаре.

Чтобы закончить рассмотрение взглядов Пуанкаре на предмет математики, отметим, что и в этом вопросе он не избежал даже элементарной путаницы. По мнению Пуанкаре, есть существенная разница в происхождении основных арифметических и геометрических истин. Пуанкаре считает, что способ рассуждения путем редукции недоступен ни для аналитического, ни для опытного доказательства, он есть истинный обра-

зец синтетического априорного суждения [1]. Напротив, *«геометрические аксиомы не являются ни синтетическими априорными суждениями, ни опытными фактами*. Они суть *условные положения»* [2], в выборе которых мы руководствуемся экономией мышления и ограничены лишь необходимостью избегать всякого противоречия [3]. Свои заключения Пуанкаре обосновывает так: основопосылки математики не являются ни опытными, ни аналитическими истинами; их происхождение надо искать в чем-то ином. Существуют разные геометрии, ничто не навязывает нам одну геометрию за счет другой. Но нельзя построить столь же различные арифметики; следовательно, истины арифметики навязаны нам, таким образом, они — априорного происхождения. Не останавливаясь на подробной критике этих заключений, сделаем два замечания. Во-первых, заключение об априорном характере истин арифметики усугубляет и без того путаные рассуждения Пуанкаре о предмете математики; априоризм несовместим с учением о свободном развитии математики. Во-вторых, рассмотрев современное состояние геометрии, Пуанкаре заключил, что «геометрические факты — это те же факты алгебры или анализа, но только выраженные на другом языке» [4]. Итак, априорное равно условному!

В «Диалектике природы» Энгельс указывал, что ко второй половине XIX столетия «Эмпирическое естествознание накопило такую необъятную массу положительного материала, что необходимость систематизировать его в каждой отдельной области исследования и расположить с точки зрения внутренней связи стала неустранимой. *Точно так же стало неизбежным привести между собою в правильную связь отдельные области познания. Но, занявшись этим, естествознание попадает в теоретическую область, а здесь методы эмпиризма оказываются бессильными, здесь может оказать помощь только теоретическое мышление»* [5]. Только *материалистическая диалектика* могла помочь здесь естествознанию; метафизика и формальная логика дать действительное решение этих задач не могли. Именно эти проблемы естествознания заставили даже буржуазную философию эпохи империализма заняться вопросом о роли формальной логики и о природе

[1] *Пуанкаре*, Наука и гипотеза, стр. 20—21.
[2] Там же, стр. 60.
[3] Благодаря такому взгляду на происхождение аксиом геометрии махизм Пуанкаре получил в математике название конвенционализма.
[4] *Пуанкаре*, Наука и метод, стр. 42.
[5] *Маркс* и *Энгельс*, Соч., т. XIV, стр. 337. (Курсив мой. — *В. М.*)

научного творчества. Ничего хорошего из этих «исследований» не вышло; получилась порча бумаги, наполнение «арсенала» буржуазной философии новыми реакционными и мистическими выводами. В числе буржуазных философов, занимавшихся вопросом о природе научного творчества, одно из первых мест занимал Мах. Он рассматривал процесс научного творчества как проявление особой способности — интуиции, ограниченной только необходимостью создавать такие научные ценности, которые экономизируют мысль [1]. По пути Маха пошел и Пуанкаре.

«Знаменитый венский философ Мах,— писал Пуанкаре, — сказал, что роль науки состоит в создании экономии мысли, подобно тому, как машина создает экономию силы. И это весьма справедливо» [2]. Важность каждого научного факта «измеряется его продуктивностью, т. е. тем количеством мысли, какое он позволяет нам сберечь» [3]. Именно такие экономизирующие мысль факты и должен собирать ученый. Метод науки — это способ удачного выбора экономизирующих мысль фактов. Особой экономии мысли удается достигнуть тогда, когда открывают общий закон. Поэтому целесообразно выбирать такие факты, которые позволяют открывать общие законы. По мнению Пуанкаре, на пути экономии мысли лучших результатов достигла современная математика. Для этого математики придумали «хорошие слова»: «равномерная сходимость», «инвариант», «группа» и т. п. Общее обладает гармонией, красотой, поэтому и стремление найти в фактах науки гармонию, удовлетворить эстетические требования ученого, в конечном счете, означает стремление экономизировать мысль.

«Мышление человека тогда «экономно», когда оно *правильно* отражает объективную истину, и критерием этой правильности служит практика, эксперимент, индустрия» [4]. Современная математика глубоко проникла в сущность изучаемой ею стороны действительного мира, познала весьма общие свойства количественных отношений и пространственных форм, выражением чего и явились слова «равномерная сходимость» «инвариант», «группа», «интерпретация». Благодаря этому современная математика в большей степени, чем математика прошлых веков, является и совершенным орудием теоретических и практических исследований. За это говорит, например

[1] См., например, *Э. Мах*, Познание и заблуждение.
[2] *Пуанкаре*, Наука и метод, стр. 21.
[3] Там же, стр. 22.
[4] *Ленин*, Соч., т. XIII, стр. 139.

рактика советских и заграничных научно-исследовательских институтов. Если, например просмотреть научную продукцию институтов механики и физики, ЦАГИ и т. п., то можно увидеть, какой большой удельный вес принадлежит современным методам математики в теоретических и практических исследованиях. Все рассуждения Пуанкаре об «экономии» — это жалкая попытка субъективного идеалиста сохранить свои философские позиции под упорным натиском научных фактов, говорящих в пользу диалектического материализма. Только при отрицании объективной реальности, т. е. при отрицании *основ* марксизма, можно всерьез говорить об экономии мышления в теории познания!» [1] «...принцип экономии мышления, если его действительно положить «*в основу* теории познания», не может вести *ни к чему* иному, кроме субъективного идеализма. «Экономнее» всего «мыслить», что существую только я и мои ощущения, — это неоспоримо, раз мы вносим в *гносеологию* столь нелепое понятие» [2]. Существенно при этом заметить, что «принцип экономии мышления по сути дела является у Маха априористическим» [3], *приближает* махизм к каптианству.

Посмотрим теперь, к каким выводам пришел Пуанкаре на основе принципа «экономии мышления».

Как математик познает всеобщее, закон? Достаточно ли ему данных, представляемых обычной (т. е. формальной) логикой? Пуанкаре считает, что обычная логика не может быть орудием исследования. Например, как доказать, что для *любых* натуральных чисел a, b, c справедлив закон ассоциативности относительно сложения, т. е. что

$$a+(b+c)=(a+b)+c?$$

Силлогизм нам ничего не дает, опытная проверка также не приводит к цели. Однако доказать этот закон возможно. Для этого нужно прибегнуть к методу полной математической индукции, согласно которому если какое-либо свойство справедливо для числа 1 и если установлено, что оно справедливо для числа $n+1$, всякий раз, как оно справедливо для числа n, —то оно будет верно для всех целых чисел. Однако индукция не следует из законов логики и, по мнению Пуанкаре, не может быть обоснована экспериментально. Точно так же в математике особый интерес представляют исследования,

[1] *Ленин*, Соч. т. XIII, стр. 139—140.
[2] Там же, стр. 139.
[3] Там же, стр. 141.

направленные на распознавание аналогии, общности в том, что раньше казалось совершенно различным. Такие исследования, как правило, дают весьма общие законы, которые, по мнению Пуанкаре, экономизируют мысль. Пуанкаре справедливо указывает, что для проведения подобных исследований обычной логики недостаточно.

Нельзя согласиться с Пуанкаре, что формальная логика не является методом отыскания новых результатов. Но можно согласиться с тем, что формальная логика *не* является *универсальным* орудием исследования: «...формальная логика представляет, прежде всего, метод для отыскивания новых результатов, для перехода от известного к неизвестному и то же самое, только в гораздо более высоком смысле, представляет диалектика, которая к тому же содержит в себе зародыш более широкого мировоззрения, так как она прорывает тесный горизонт формальной логики» [1]. К сожалению, это прекрасное замечание Энгельса в нашей литературе о точных науках развития не получило. До сих пор не развит вопрос о значении формальной и диалектической логик для развития современной математики. В этом направлении интересно исследовать роль логики при обосновании посылок арифметики и геометрии. Несомненно только одно: исследования, на примерах которых Пуанкаре иллюстрировал ограниченность формальной логики, производились на основе стихийно-диалектических рассуждений.

Не зная диалектики, находясь в плену у буржуазной идеалистической философии, Пуанкаре не сумел сделать правильных выводов из факта недостаточности формальной логики для всестороннего развития математики. Развенчав формальную логику, Пуанкаре приписал роль творческого фактора интуиции, якобы *врожденной* гениальным и талантливым математикам. Интуиция иррациональна, относится к подсознательному «я», и именно она есть орудие изобретений. Только интуиция позволяет предвидеть и обозреть целое, обычно искусственно расчленяемое формальной логикой на составные части. Интуиция — орудие выбора фактов, которые приводят к законам, а потому и к экономии мышления. Никаких серьезных доказательств в пользу своей «теории» интуиции Пуанкаре не дал.

Пуанкаре закончил «философствования» об интуиции весьма бесславно: он заключил, что интуиция не есть индивидуальное приобретение, а приобретение... расовое, которое за

[1] *Маркс* и *Энгельс*, Соч., т. XIV, стр. 134.

крепляется путем... естественного отбора. Следовательно, выходит что творческая интуиция врождена у некоторых передовых представителей некоторых передовых рас [1].

Как советский математик должен оценить «учение» Пуанкаре об интуиции? *Как «учение» лакея денежного мешка, холопа капиталистов*! Так, и только так, можно оценить это «учение» и вот почему.

В народе всех стран непочатый родник талантов, которые могли бы развивать, оплодотворять прекрасными идеями науку и технику. Но многие десятилетия таланты из народа не находили себе применения; их «капитализм мял, давил, душил тысячами и миллионами» [2]. Капитализм развивал науку постольку, поскольку она ему была нужна для существования и для борьбы против народных масс. Капитализм старался допустить к науке только тех ученых, которые защищали его господство. Отчасти в этом капитализм преуспел: никогда нельзя забывать указания Ленина, что вся казенная и либеральная наука защищают капитализм. Идеологи капитализма всегда старались окружить научную работу ореолом недосягаемости и мистической тайны, доказать, что народные массы не могут овладеть наукой, не могут выдвинуть талантливых и гениальных ученых. Все это делалось против народа, для эксплоатации народа. *Когда Пуанкаре заявляет, что творить могут только ученые, наделенные врожденной интуицией, он в утонченной форме повторяет обычные басни идеологов капитализма, защищает «превращение знания в орудие защиты привилегий денежного мешка и господства капитала над народом»* [2]. Вот в чем основная *суть* «учения» Пуанкаре об интуиции.

Когда капитализм вступил в эпоху империализма, в силу неравномерности развития отдельные капиталистические страны отставали не только в промышленности, но и в науке. В передовых капиталистических странах ученые имели много больше возможностей для ведения исследовательской работы, благодаря чему наука этих стран развивалась, играла ведущую роль. Не случайно в конце XIX и начале XX столетий руководящую роль в науке играли ученые Америки, Англии, Германии и Франции. Напротив, наука отставших стран, в особенности стран колониальных, отставала, была вынуждена следовать за наукой передовых стран. Наука этих стран не развивалась достаточно быстро не только потому, что внутри

[1] См. *А. Пуанкаре*, Наука и метод, русск. пер. 1910 г., в особенности стр. 127.

[2] *Ленин*, Соч., т. XXII, стр. 158.

стран не было достаточно ресурсов, но и потому, что ее развитие порой тормозили «великие» державы. *Когда Пуанкаре говорит, что интуиция есть приобретение расовое, закрепленное естественным отбором, он в замаскированной форме оправдывает «право» передовых империалистических стран на грабеж стран отставших и колониальных.* Маскировка Пуанкаре состоит в том, что под расой он понимает передовое империалистическое государство, а победу передовых империалистических стран, их грабительскую политику «скромно» именует естественным отбором. За все эти «научные» выводы Пуанкаре заслужил поцелуи фашистских мракобесов.

Архиреакционность, антинаучность «учения» Пуанкаре об интуиции несомненна. Строительство социализма в СССР показало, что *миллионные* массы трудящихся города и деревни могут с успехом овладевать наукой и техникой. Блестящий тому пример — стахановское движение. Кадры советских ученых — это в основном люди, вышедшие из трудового народа. Ни для кого не секрет, что теперь советская наука занимает одно из первых мест в мире, и в ряде областей далеко перегнала Запад и Америку (марксизм-ленинизм, физиология, яфетическая теория, работы академика Лысенко и т. д.) Таким образом, дело не в какой-то «врожденности», которая только одна, якобы, дает основание к творчеству. Дело, значит, в том, что когда Великая Социалистическая Октябрьская революция сбросила с народа путы капитализма, народ под руководством своей партии большевиков смог выделить и постоянно будет выделять десятки тысяч ученых, сотни тысяч техников, инженеров и учителей, миллионы квалифицированных работников города и деревни.

Является ли «учение» Пуанкаре об интуиции случайным, или оно связано с его философией? Позволительно настаивать на последнем. Махистская, субъективно-идеалистическая болтовня об «экономии мышления» не допускает рационального объяснения процесса научного творчества, но зато вполне увязывается с мистической, якобы, «врожденной», интуицией. Следовательно, действительно «учение» об интуиции входит органической частью в философию Пуанкаре. За это говорят и его философские работы; почти в каждой из них он говорит об интуиции.

Рассматривая роль интуиции, Пуанкаре по-своему определил роль формальной логики в математике. Хотя интуиция — инструмент творчества, однако, указывает Пуанкаре, она иногда может привести к ошибочным заключениям. С точки зрения геометрической интуиции очевидно, что всякая непрерывная

кривая в каждой точке имеет касательную. Однако, подвергнув логическому анализу это утверждение, Вейерштрасс доказал его ошибочность. Ошибку интуиции исправила логика. Следовательно, логика — контролер, проверяющий истинность продукции интуиции. «Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции» [1].

Здесь мы естественно переходим к трактовке Пуанкаре критерия истины в математике. Судя по содержанию основных гносеологических принципов Пуанкаре, можно подумать, что в математике он придерживался критерия истины Беркли. Однако это не совсем так. Следуя традиционным воззрениям, в начале своей философской деятельности Пуанкаре считал критерием истины в математике непротиворечивость. «Математический объект существует, — неоднократно подчеркивал Пуанкаре, — раз его определение не заключает противоречия ни само в себе, ни с предложениями, допущенными раньше». Например, если мы имеем «систему постулатов и если мы можем доказать, что эти постулаты не заключают противоречия, мы вправе рассматривать их как определения одного из тех понятий, которые фигурируют в этой системе предложений» [2]. По мнению Пуанкаре, критерий непротиворечивости показывает, что существование в математике имеет смысл, отличный от существования реальных тел.

Как доказать непротиворечивость математического объекта? Этот вопрос оказался роковым для философии Пуанкаре. Решая его, Пуанкаре попал в такой логический круг, что даже многие буржуазные философы предпочли итти не с Пуанкаре, а самостоятельными путями.

Чтобы доказать непротиворечивость математического объекта, как правило, «прибегают к методу *примеров*, пытаются эффективно дать пример предмета, удовлетворяющий определению». «Возьмем определение, выражаемое при помощи постулатов. Мы хотим определить понятие A и говорим, что, согласно определению, A есть всякий предмет, для которого известные постулаты истинны. Если мы можем прямо доказать, что все эти постулаты истинны для известного предмета B, то определение будет оправдано и предмет B будет *примером* понятия A. Мы будем уверены, что постулаты непротиворечивы, так как имеются случаи, в которых все они оказываются истинными» [3]. Например, допустим, что нам нужно доказать непротиворечивость гиперболической геометрии Лобачевского—Больяи. Для этого мы можем построить модель из объектов геометрии Евклида, т. е. взять такие объекты геометрии Евклида, которые, будучи рассматриваемы как точки, прямые и плоскости, удовлетворяют всем аксиомам гиперболической геометрии. Присмотримся, однако, поближе к нашему доказательству и постараемся выяснить, является ли оно абсолютным или относительным. Мы должны признать, что наше доказательство относительно; строго говоря, мы доказали только, что гиперболическая геометрия непротиворечива, если истинны аксиомы геометрии Евклида, или, иначе говоря, если существуют упоминаемые в ней объекты. Но чтобы доказать существование объектов геометрии Евклида, в свою очередь, надо доказать непротиворечивость системы аксиом геометрии Евклида. Таким образом, нам удалось только *свести* вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского—Больяи к вопросу о непротиворечивости геометрии Евклида. Создавая числовые модели, мы, в конце концов, придем к вопросу о непротиворечивости арифметики — к знаменитой проблеме, которую в докладе «О проблемах будущей математики» Д. Гильберт поставил второй по счету, вслед за гипотезой континуума Кантора. Но внутри математики непротиворечивость арифметики доказать нельзя, ибо каждое математическое доказательство методом моделей дает относительное доказательство непротиворечивости [1]. Для доказательства непротиворечивости арифметики надо выйти *за* пределы математики. *Такой выход не может быть осуществлен без предварительного решения основного вопроса философии — что предшествует: природа мышлению или мышление природе.* Для материалиста арифметика подтверждена тысячелетиями человеческой практики. Для идеалиста это далеко не так. Логисты — объективные идеалисты — хотели свести арифметику к формальной логике и тем доказать непротиворечивость арифметики. Но этому помешали открытые в формальной логике противоречия. Однако итти по пути логистов, ни тем более по пути материалистов, Пуанкаре не смог, ибо он — субъективный идеалист. Пуанкаре просто напросто обошел трудность, замолчал ее. Но если бы он рискнул на дальнейшие выводы, то пришел бы к тяжелым противоречиям, которые показали бы, что субъективный идеализм Пуанкаре — Маха стоит в непримиримом противоречии с обычным математическим учением о непротиворечивости.

---

[1] *Пуанкаре*, Наука и метод, стр. 163.
[2] Там же, стр. 194.
[3] Там же, стр. 195.

[1] Попытки Гильберта дать прямое доказательство непротиворечивости арифметики пока к цели не привели.

Во-первых, выше цитировалось объяснение Пуанкаре метода моделей, из которого видно, что Пуанкаре соподчиняет непротиворечивость существованию истинных (т. е. отражающих реальный мир) математических объектов. Если это так, — а это действительно так, — то все рассуждения Пуанкаре о свободном развитии математики являются набором пустых слов: *в математике непротиворечиво только то, что отражает количественные отношения существующих (или осуществимых) объектов; следовательно, содержание математики — не продукт свободного мышления математиков.*

Во-вторых, Пуанкаре старается убедить всех, что данные интуиции дожны быть доказаны логикой. Но мы видели, что все такие доказательства в конечном счете сводятся к вопросу о непротиворечивости арифметики. По мнению Пуанкаре, основные посылки арифметики априорны. Следовательно, результаты свободного творчества проверяются априорными истинами. Хороша свобода, нечего сказать! Если же учесть, что априоризм в философии Пуанкаре не случаен, то сила противоречия станет особенно убедительной.

Таким образом, действительно *субъективный идеализм несовместим с обычным математическим учением о непротиворечивости, опровергается этим учением.*

Впрочем, отдадим должное Пуанкаре. Он очень мало заботился о согласованности всех частей своего учения, настолько мало, что, когда это оказалось необходимым, отказался даже и от критерия непротиворечивости и вернулся к критерию Беркли. Случилось это позже, тогда, когда критерий непротиворечивости отказался служить, когда Пуанкаре занялся критикой работ Кантора и Цермело. Здесь Пуанкаре пошел по пути, подсказанному эффективистами. Следуя путем эффективистов, Пуанкаре пришел к полному отрицанию результатов Кантора, заявил, что актуальной бесконечности нет и закончил утверждением, что «всякая теорема, относящаяся к бесконечным числам или вообще к тому, что называется бесконечными совокупностями, или трансфинитными количественными, или трансфинитными порядковыми и т. д. и т. п., не может быть чем-либо иным, как сокращенным способом формулирования предложений, относящихся к конечным числам [1]. Этот вывод не случаен, Пуанкаре сам счел необходимым подчеркнуть, что *если строго придерживаться позиций субъективного идеализма, то надо отрицать существование актуальной бесконечности* [2].

[1] Последние мысли, стр. 73.
[2] Там же, гл. V.

Итак, дал ли Пуанкаре цельную, последовательную философию математики? Нет, не дал. Конвенционализм Пуанкаре — всего-навсего реакционная, путаная, эклектическая разновидность махизма.

Решил ли Пуанкаре хоть одну трудность, стоящую на пути обоснования современной математики? Нет, не решил. Благодаря эклектизму своей философии он запутал трудности.

Одно с несомненностью показал Пуанкаре — неспособность субъективного идеализма помогать математике решать проблемы обоснования, несовместимость субъективного идеализма с математикой.

§ 2. ЗАРОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВИЗМА

Эффективизм, как самостоятельное течение в буржуазной философии математики, датирует от споров об аксиоме Цермело.

Спор об аксиоме Цермело способствовал разделению математиков буржуазных стран на два лагеря: *лагерь объективного идеализма и лагерь субъективного идеализма*. В основных вопросах математики позиции субъективного идеализма защищали Борель, Бер и Лебег [1]. Напротив, Цермело, Адамар и Гильберт отстаивали понимание математики с позиций объективного идеализма. При этом важно отметить, что их высказывания часто носили материалистическую окраску, что особенно относится к Адамару.

Спор открыл Борель, выступивший на страницах «Mathematische Annalen» с критикой мемуара Цермело [2].

Против результатов Цермело Борель выдвинул два возражения:

1. Относительно любого множества M можно поставить чрезвычайно важную проблему:

A. Представить M в форме вполне упорядоченного множества.

Решение проблемы A почти автоматически дало бы решение проблемы B:

B. Пусть дано какое-либо подмножество M' множества M. Выберем в M' определенным способом (но, впрочем, произвольным) один элемент m'. Этот выбор можно сделать в каждом подмножестве M' множества M.

По мнению Бореля, Цермело добился замечательного результата, показав, что проблема A будет решена, если решить

[1] Полемика между Адамаром, Бером, Борелем и Лебегом отражена в их переписке. См. *E. Borel*, Leçons sur la Théorie des fonctions, 3-me éd., p. 150.
[2] «Mathematische Annalen», B. 60, 1905.

проблему B. Иначе говоря, Цермело доказал эквивалентность проблем A и B. Однако этот результат не удовлетворил Бореля. Чтобы проблема B могла быть рассматриваема как решенная, по мнению Бореля, *необходимо дать*, по меньшей мере теоретически, *способ определения элемента m' любого подмножества M' множества M*. Эта проблема очень трудна, если предположить, что M есть континуум.

2. Цермело, писал Борель, считает допустимым рассуждение: возможно в подмножестве M' выбрать по желанию элемент m'; этот выбор может быть сделан для каждого подмножества M', в множестве этих множеств. Такое рассуждение показалось Борелю не более обоснованным, чем следующее: чтобы вполне упорядочить множество M, достаточно выбрать из M произвольно какой-либо элемент и приписать ему ранг 1, затем выбрать другой элемент и приписать ему ранг 2, и так далее, до тех пор, пока не будут выбраны *все* элементы множества M. Такие рассуждения Борель решительно отверг, считая их находящимися *вне математики*.

Нетрудно усмотреть центральную мысль возражений Бореля. Цермело рассуждал об элементах и множествах как о существующем *вне* сознания, как об *объектах* познания. Напротив, Борель соглашается считать существующим только то, что индивидуально определено: без определения нельзя говорить о существовании, существующее дано в мышлении. Если каждый элемент m' подмножеств M' множества M удалось определить индивидуально, значит, в этом случае аксиома Цермело верна и множество всех m' существует. Если это сделать не удалось, нет никаких оснований говорить о существовании множества всех m'. Таким образом, Борель критиковал результаты и аксиому выбора Цермело с субъективно идеалистической точки зрения.

Второе возражение Бореля целиком вытекает из первого. Еще раньше [1] Борель критиковал трансфинитные числа второго класса как неопределимые индивидуально. Требуя поставить «вне математики» рассуждения Цермело, Борель тем самым требовал не вводить в математику всего того, что не может быть сразу индивидуально определено.

Лебег также не признал результата Цермело разрешающим проблему A. Когда говорят о законе, определяющем трансфинитную бесконечность актов выбора, я, писал Лебег, отношусь к этому с большим недоверием, так как никто еще не дал такого закона, в то время как я знаю законы, определяющие

[1] См. «Leçons sur la Théorie des fonctions», Note IV.

счетную последовательность выборов. Без определения исследуемого объекта нельзя построить в математике ничего прочного. Если и есть что-либо полезное в исследовании Цермело, то только одно: он показал целесообразность нахождения проблем, решение которых влечет решение проблемы A и которые действительно могут быть решены в частных, часто встречающихся случаях.

Бэр занял более крайнюю позицию. В письме к Адамару он заявил, что если множество дано, то это еще не значит, что даны его подмножества. Бэр подчеркнул, что, по его мнению, выражение «множество дано» не всегда имеет определенный смысл. Бэр также настаивал на необходимости ограничить область математики только тем, что может быть индивидуально определено. По мнению Бэра, могут быть индивидуально определены только *конечные* множества; таким образом, бесконечное находится «вне математики».

Как видим, в философском сысле Борель, Лебег и Бэр заняли одну и ту же позицию; они защищали субъективно-идеалистическое понимание предмета и методов развития математики.

Иную позицию занял Адамар. Лебег, писал Адамар, спрашивает — «можно ли доказать существование математического объекта без его определения?» На этот вопрос я отвечаю: да. Рассуждения Цермело не дают нам средства вполне упорядочить континуум, и трудно предположить, что кто-либо в дальнейшем такое средство даст. Однако это еще не аргумент для отрицания рассуждений Цермело, так как они дают только доказательство *существования* решения проблемы. Бэр, Борель и Лебег говорят о *их* возможностях вполне упорядочить континуум, что совершенно субъективно; я бы сказал так: поддается ли континуум упорядочиванию, возможно ли его вполне упорядочить? В математике надо различать понятия, которые точно определены, от тех, которые только названы. Во втором случае мы имеем дело с мало познанным. Отчаиваться, однако, не стоит; надо стремиться мало познанное познать хорошо.

Таким образом, для Адамара существующее находится *вне* сознания человека; человек познает существующее. Для Адамара человек *не сразу* познает объект, а от неполного знания переходит к полному.

Адамар указывал Борелю, что тот, критикуя рассуждения Цермело, воспользовался ими при исследовании степенных рядов, для которых их круг сходимости является купюрой. Если бы, однако, ограничиться степенными рядами, для кото-

рых закон построения может быть описан, то следовало бы считать истинной старую точку зрения, согласно которой ряды, имеющие круг сходимости купюрой, представляют собой исключение, в то время как справедливо как раз обратное заключение.

Это замечание Адамара крайне важно. *Адамар впервые указал, что субъективно-идеалистическое понимание предмета и методов математики ограничивает поле и результаты полноценных математических исследований.* Как указывалось раньше, современная математика *подтвердила* это замечание Адамара.

Контрвозражение Бореля Адамару было весьма кратким: Борель признал законность рассуждений Цермело *как вспомогательного средства* ввиду их *пользы* при отыскании новых математических фактов. Но Борель потребовал, чтобы каждый найденный с помощью рассуждений Цермело математический факт получал в дальнейшем строгое обоснование.

§ 3. ЭФФЕКТИВИЗМ БОРЕЛЯ И ЛЕБЕГА

Когда Борель, Бэр и Лебег выступили против Цермело, стало ясным, что они защищают субъективно-идеалистическое понимание математики. Оставалось недостаточно ясным только одно: что́ они понимают под «индивидуально определимым» и находящимся «вне математики». После спора об аксиоме Цермело эффективисты (в особенности Борель и впоследствии Лузин) неоднократно возвращались к вопросам обоснования математики; за это время они достаточно отчетливо изложили свое понимание индивидуальной определимости математического объекта, существования «вне математики» и т. п.

В современной буржуазной философии математики воззрения эффективистов именуются *реализмом*, или *эмпиризмом*, а иногда рассматриваются даже как новое, совершенно самостоятельное, течение. В какой мере эффективисты могут быть названы реалистами, будет видно из дальнейшего. Сейчас же мы покажем, что *эффективизм есть разновидность махизма в математике*. Для этого мы рассмотрим взгляды Бореля на предмет математики и роль интуиции в ее развитии.

По Борелю, математика не отражает существующую вне нашего мышления материальную действительность; математики создают собственные, нам полезные ценности. Он *противополагает* творческую деятельность ученого познанию реальной действительности.

Вместе с Пуанкаре Борель не соглашается отождествить математику с формальной логикой, т. е. выступает против

логистики, критикует ее справа. Он считает, что только врожденная у гениальных и талантливых математиков интуиция создает из данных логики математику. Иначе говоря, Борель поддерживает самую реакционную часть философии Пуанкаре.

По мнению Бореля, если для физика материалом являются факты, то материю математики составляет логика. Но логика дает математику лишь мертвый, сырой материал, представляющий собой «бесконечное множество всевозможных формул»[1]. Данных логики для построения математики достаточно ровно настолько, насколько достаточно красок для создания картины. Нужен художник, способный оживить мертвый узор сети математических формул. Роль художника выполняет математик посредством особой, ему *прирожденной* интуиции. «Наука начинается, когда выбирают между формулами с целью их классифицировать, сравнивать, объединять их общими теориями». Для этого формальная логика недостаточна. Нужна интуиция, счастливая идея (вспомним Пуанкаре и «принцип» экономии мышления Маха!), «введение такого понятия, которое позволит сначала сгруппировать известные факты, а затем открывать новые».

«Изобретение действительно плодотворное в математике, как и в других науках, состоит в открытии новой точки зрения для классификации и интерпретации фактов». Недостаточность логики, — пишет Борель, — еще лучше выясняется, когда мы изучаем вопросы, интерес которых покоится на сближении исследований двух порядков, различных по видимости. Например, когда Клейн показывает, что алгебраическая теория уравнений пятой степени существенно упрощается предварительным изучением свойств правильного икосаэдра и что это же сближение позволяет плодотворно изучать некоторые дифференциальные уравнения второго порядка, мы восхищаемся тем, как этот вид целого освещает рассеянные факты, но мы вынуждены признать, что единственная роль логики в этой конструкции состояла в доставлении материала для нас, и мы не смешиваем каменщика с архитектором».

Чем отличается понимание Борелем предмета и закономерностей развития математики от понимания Пуанкаре? По существу — ничем; все основные моменты их рассуждений совпадают. Пуанкаре и Борель отрицают материалистическое по-

---

[1] Здесь и в дальнейшем, где речь идет об интуиции, я цитирую статью Бореля, L'intuition et la logique en mathématique», напечатанную в журнале «Revue de Metaphysique et de Morale», 1907, стр. 273—283. См. в этом же журнале за 1907, стр. 747, статью Бореля L'évolution de L'intelligence géométrique».

нимание предмета математики, трактуют его в махистско-кантианском духе. Они усматривают во внутренней, якобы прирожденной математикам, интуиции творческий фактор развития математики. По Пуанкаре, формальной логике отводится скромная роль логики доказательства, а по Борелю, звание каменщика, поставляющего кирпичи для кладки здания математики, предусмотренного «планом» интуиции. Что Борель— махист, еще лучше выяснится при рассмотрении его учения о критерии истины в математике.

Пуанкаре перескакивал от критерия непротиворечивости к критерию Беркли. Как мы видели, в начале своей философской деятельности Пуанкаре придерживался критерия непротиворечивости, причем его обоснование этого критерия противоречило принятым им субъективно-идеалистическим посылкам. Впоследствии, после обострения споров о канторизме и логистике, Пуанкаре пытался освободиться от парадоксов и противоречий теории множеств посредством критерия Беркли; здесь он находился под влиянием эффективистов [1].

Эффективисты с самого начала своей философской деятельности отказались признать формальный критерий истины. «Следует различать, — писал Борель, — подлинную математику от чисто словесных логических спекуляций, в которых озабочены лишь одним совершенно отрицательным качеством: свободой от словесного противоречия» [2]. Лузин считает идеи Гильберта о непротиворечивости «мало счастливыми» [3]. Насколько эффективисты действительно оспаривают критерий непротиворечивости, будет видно из дальнейшего. Пока же отметим причину выступления эффективистов против критерия непротиворечивости. Найти эту причину нетрудно. Борель, Лебег и Лузин, т. е. все главные эффективисты, работают преимущественно в области теории функций действительного переменного. Столкнувшись с глубокими трудностями и противоречиями в теории множеств, не сумев преодолеть их, эффективисты, стоявшие на точке зрения субъективного идеализма, могли пойти только по пути *выбрасывания* из математики всего парадоксального и недостаточно обоснованного, могли поставить перед собой только чисто *отрицательную* задачу: *ограничить содержание и методы математики так, чтобы их развитие не привело в дальнейшем ни к каким парадоксам и противоречиям, не дало недостаточно обоснованных результатов*. Эффективисты были убеждены, что имеют в критерии Беркли достаточную гарантию против всего парадоксального и противоречивого. Таким образом, в вопросе о критерии истины эффективисты стоят еще ближе к Беркли и Маху, чем Пуанкаре.

[1] См. *А. Пуанкаре*, Последние мысли, русск. пер. 1923 г., стр. 57.

[2] *Н. Н. Лузин*, О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций (доклад на майской сессии Академии Наук СССР, 1935 г., стр. 21).

[3] Там же, стр. 14.

Борель, пожалуй, лучше всего изложил свой критерий истины в заметке «Философия математики и бесконечность» и в докладе« О принципах теории множеств», прочитанном им на четвертом международном математическом конгрессе в 1908 г.[1]. Следуя Беркли, Борель считает, что *в математике существует только то, что может быть без двусмысленности понято всеми математиками* [2]. Когда, в частности, речь идет о множестве, то, по мнению Бореля, оно будет понято всеми математиками одинаково, если *любой* элемент этого множества можно охарактеризовать *индивидуально*. «Трудное для философов слово indéfiniment, — подчеркивает Борель, — для математиков не представляет затруднений, если они уверены, что сами себя понимают совершенно точно, не опасаясь никакой двусмысленности».

Беркли считал, что если какое либо понятие понимается людьми неодинаково, то вещь равная этому понятию не существует. Элементарная последовательность должна была бы подсказать Борелю аналогичное заключение. Однако Борель не поддержал этого заключения Беркли. По мнению Бореля, если какое-либо математическое понятие, или теорема, или теория неодинаково понимаются всеми математиками — им нет места в математике, они находятся... «вне математики». Таким образом, непосредственно следующее из критерия Беркли отрицание существования Борель заменил каким-то таинственным существованием «вне математики». Что же скрывается за этим «вне математики»? Беркли был реакционным философом, ему было глубоко безразлично, что выбросить или оставить в математике, лишь бы не пострадала поповщина. Борель — математик; чутьем математика он знает, что недостаточно ясны и непонятны только недостаточно обоснованные части математики. Борель знает, что после строгого обоснования неясное,

[1] См. его «Leçons sur la Théorie des fonctions», 3-е изд., стр. 160—162, 166—174.

[2] Точнее говоря, Борель принимает одну сторону критерия Беркли. Для Беркли существовать — значит быть в восприятии или быть познаваемым. Для Бореля существовать — значит быть познаваемым. Однако для дальнейшего это различие во взглядах Беркли и Бореля принципиального значения не имеет.

непонятное становится ясным и понятным. Было время, когда многие математики отрицали существование логарифмов отрицательных чисел, по меньшей мере считали их неясными. После строгого обоснования понятия комплексного числа получило строгое обоснование и понятие логарифма отрицательного числа. Если бы Борель просто отрицал существование недостаточно обоснованных, а потому и неясных частей математики, будущее могло бы принести ему не мало горьких минут. Осторожности ради, в разрез с принятым критерием Беркли, Борель накладывает на недостаточно обоснованные части математики ярлычок «вне математики», *временно* ставит эту часть математики *наряду* с математикой. Если же кто-либо даст этой части математики строгое в смысле Бореля обоснование, он не преминет перевести ее из «вне» «в» математику. «Если бы,—пишет Борель,—в один прекрасный день все математики заявили, что они точно поняли смысл аксиомы Цермело (т. е. если бы аксиома Цермело получила строгое обоснование. — *В. М.*), и притом оказалось, что они ее одинаково поняли, — не было бы никаких оснований считать аксиому Цермело находящейся вне математики». Еще бы! Если бы математики строго обосновали аксиому Цермело, а Борель попрежнему ее отвергал, ибо, видите ли, она раньше была не обоснована, а потому и непонятна, то кто стал бы поддерживать его философию?! Таким образом, считаясь по необходимости с подлинным развитием математики, которое опровергает идеализм, Борель во имя спасения своего идеализма с самого начала сделал учение о критерии Беркли противоречивым, эклектичным. Действительно, для Беркли вещь, равная идее, или существует или не существует; существования в возможности он признать не может. Напротив, своим «вне математики» Борель признает существование в возможности.

По мнению Лебега, «в математике, как и во всем остальном, причины, заставляющие признать себя удовлетворенным некоторым рассуждением, имеют психологический характер» [1]. Надо уметь убеждать в истинности доказываемых утверждений, иначе говоря, истинно и существует только то, что понято всеми математиками одинаково. Отстаивая занятуюв споре об аксиоме Цермело позицию, Лебег утверждает, что математический объект существует, если дано его определение или, что лучше, дана его конструкция, так как в противном случае

[1] *Лебег*, Интегрирование и отыскание примитивных функций, стр. 270, второе примечание.

нельзя убедить математиков в истинности доказательств и т. п. Если дело обстоит иначе, объект находится «вне математики». Таким образом, как и Борель, Лебег отстаивает субъективно-идеалистическое понимание математики.

Если голова человека забита идеалистическими измышлениями, субъективно идеалистический критерий Беркли может показаться новым откровением, всеспасительным средством от всяких трудностей. В ином свете предстанет критерий Беркли, если к нему подойти с научной, с материалистической точки зрения.

Большинство математиков скажет, что при прочтении математического трактата они поняли его содержание одинаково потому, что автор дал точные доказательства своим утверждениям. Если некоторые доказательства автора вызывают сомнения, но утверждения правильны, математики попытаются дать этим утверждениям точные доказательства. Иначе говоря, практика математических исследований показывает, что уверенность в истинности математических утверждений является следствием точных, строгих доказательств. И понятно почему: *в математике точными доказательствами являются только такие доказательства, которые базируются на проверенных в практике основных посылках.* С тех пор как удалось найти арифметическую интерпретацию гиперболической геометрии, никто не станет отрицать ее истинности; теперь отрицание гиперболической геометрии равнозначно отрицанию проверенной в практике арифметики. Борель переворачивает, ставит на голову обычное, правильное соотношение вещей, объявляет истинность следствием уверенности математиков. Тем самым *Борель уничтожает объективную истину в математике.*

Антинаучность критерия Беркли можно показать на фактах истории математики.

Когда Ньютон и Лейбниц ввели понятие бесконечно-малого и дали ему мистическое толкование [1], многим математикам это понятие казалось лишенным предметного содержания, противоречивым, а доказанные в анализе теоремы, — ошибочными. Такое критическое отношение не было лишено оснований: бесконечно-малые подчинялись законам, противоречивым с точки зрения обычной арифметики, причем эти законы не были строго обоснованы. Тем более было непонятно, как с помощью бесконечно-малых получались правильные результаты, как теоретические, так и практические. Это дало повод многим

[1] См. математические рукописи Маркса.

реакционно настроенным математикам и философам выступить против анализа бесконечно-малых. Как уже указывалось раньше, Беркли отрицал анализ бесконечно-малых потому что основные посылки анализа противоречили его критерию истины. Беркли считал необходимым изгнать бесконечное из математики, свести анализ к элементарной математике. В XVII и XVIII веках защитники анализа могли противопоставить своим противникам указание на правильность получаемых с помощью анализа результатов, т. е. хотя и веский, но недостаточный аргумент. Только много лет спустя, *когда в области анализа накопился достаточный фактический материал*, удалось развить теорию пределов и с ее помощью снять мистический покров с понятия бесконечно-малого, поднять задачу обоснования классического анализа на более высокую ступень. В теории пределов бесконечность осталась, но пополнилась более глубоким содержанием; следовательно, математики пошли по пути, подсказанному содержанием науки, а не субъективно-идеалистическим критерием Беркли.

Почему бесконечно-малые Ньютона и Лейбница были действенным орудием исследований? Потому что бесконечно-малые Ньютона и Лейбница *не* были пустышками, ничего не отражающими в действительности понятиями. Хотя теория пределов показала, что содержание бесконечно-малых отлично от того, с чем их связывали Ньютон и Лейбниц, однако они правильно описали *отношения* между бесконечно-малыми, т. е. открыли самое важное для проведения исследований. Учение Ньютона и Лейбница о бесконечно-малых содержало правильное ядро, которое теория пределов закрепила и очистила от мистической оболочки.

Какой урок можно извлечь из истории философской борьбы вокруг учения Ньютона и Лейбница о бесконечно-малых? История этой борьбы учит нас, что: «В теории познания, как и во всех других областях науки (в частности, в математике.— *В. М.*), следует рассуждать диалектически, т. е. не предполагать готовым и неизменным наше познание, а разбирать, каким образом из *незнания* является *знание*, каким образом неполное, неточное знание становится более полным и более точным» [1].

История бесконечно-малых учит нас, что субъективно-идеалистический критерий Беркли может *тормозить* развитие недостаточно разработанных математических дисциплин, может *отвергать истинное*; следовательно, критерий Беркли *антинаучен, антидиалектичен, уничтожает объективную истину, не является критерием истины.*

[1] *Ленин*, Соч. т. XIII, стр. 84.

В 1826—1832 гг. Лобачевский и Больяи опубликовали первые работы по геометрии гиперболического пространства. Однако их работы не получили признания. Большинство математиков того времени думало, что геометрия изучает точки, прямые и плоскости, описанные Евклидом в его определениях. Так как аксиома параллельности Лобачевского — Больяи не выполняется в области евклидовых прямых, то большинство математиков считало гиперболическую геометрию лишенной предметного содержания, парадоксальной, двусмысленной. Гиперболическая геометрия в форме, которую ей придали Больяи и Лобачевский, была *гипотезой*, смелой, прекрасной, рвавшей с рутиной старых представлений о предмете геометрии, но все же гипотезой. Больяи и Лобачевский сумели предсказать существование систем объектов, отношения между которыми описываются аксиомами гиперболической геометрии, но этих объектов не нашли. Только работы Бельтрами (1864 и 1876 гг.) [1] впервые показали неправильность предубеждений против геометрии гиперболического пространства. Занимаясь вопросами картографии, Бельтрами случайно заметил, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны частично осуществляется планиметрия Лобачевского — Больяи. После работ Клейна и Пуанкаре, в особенности после победы теоретико-множественных представлений, гиперболическая геометрия завоевала в математике полное право гражданства, стала теорией.

Как отнесся бы эффективист к гиперболической геометрии, если бы он был современником Лобачевского — Больяи? Вне всякого сомнения, он присоединил бы свой голос к врагам гиперболической геометрии, поставил бы гиперболическую геометрию «вне» математики. Подобно большинству математиков того времени, наш эффективист говорил бы о «беспредметности», «парадоксальности» геометрии Лобачевского — Больяи и советовал бы всем и вся не заниматься такой «словесной спекуляцией».

Следовательно, *критерий Беркли отрицает гипотезы в математике*, что совершенно неправильно. Кроме того, и это главное, *критерий Беркли может уничтожать внутри-математические возможности преодоления трудностей обоснования и роста математики*. Действительно, Бельтрами открыл свою интерпретацию совершенно случайно,— он заметил совпадение

[1] См. сборник «Об основаниях геометрии», Казань 1895 г.

метрики поверхностей постоянной отрицательной кривизны с метрикой плоскости гиперболического пространства. Следовательно, открытие Бельтрами стало возможным потому, что еще не подтвержденная гиперболическая геометрия была логически развита влючительно до метрики. Если бы Лобачевский и Больяи стали на точку зрения эффективизма, не разработали гиперболической геометрии, тогда Бельтрами, несомненно, не усмотрел бы в результатах своих исследований интерпретации этой геометрии. Благодаря этому дело развития и обоснования гиперболической геометрии было бы отложено на многие годы. Если же мы учтем сказанное об истории анализа, то можно притти к такому заключению: преодоление трудностей обоснования математических дисциплин органически связано с развитием фактического содержания этих дисциплин, с проверкой их основных посылок в свете все разрастающегося фактического материала математики. Напротив, критерий Беркли отрицает необходимость развития недостаточно обоснованных математических дисциплин; тем самым в силу своей антинаучности критерий Беркли уничтожает возможности преодоления трудностей обоснования и развития математики.

Примеров, подобных вышеприведенным, можно привести немало. Все они говорят за то, что:

1. Субъективно-идеалистический критерий истины Беркли уничтожает объективную истину, благодаря чему и не может служить ее критерием.

2. Если придерживаться критерия Беркли, то можно отождествлять истинное с ложным и наоборот.

3. В силу своей антинаучности и антидиалектичности критерий Беркли отрицает в математике гипотезы, недостаточно обоснованные ее части, заставляет признавать в математике истинным только то, что уже строго обосновано. Тем самым критерий Беркли уничтожает возможности преодоления трудностей обоснования и развития математики.

Посмотрим теперь, как эффективисты руководствуются критерием Беркли в практике своей исследовательской работы. Это позволит нам более подробно выяснить, что́ эффективисты оставляют «в» и «вне» математики, что́ они понимают под индивидуально или конструктивно определимым математическим объектом.

Раньше указывалось, что эффективисты настроены против критерия непротиворечивости. Справедливость требует отметить, что эффективисты действительно не склонны привлекать критерий непротиворечивости и относятся весьма скептически к аксиоматическому методу. Однако отсюда вовсе не следует, что эффективисты руководствуются критерием Беркли в обосновании и оценке результатов своей исследовательской работы. В каждой работе Борель, Лебег и Лузин дают строго математическое обоснование своим утверждениям и конструкциям. Больше того, эффективисты никогда не согласятся признать существующим в математике противоречивое понятие; следовательно, отрицательную сторону критерия непротиворечивости эффективисты сохраняют. Удивительного в такой тактике эффективистов ничего нет: критерий Беркли уничтожает объективную истину, поэтому эффективисты должны привлекать к обоснованию своих результатов обычные математические методы. В области философии эффективисты занимаются идеалистическими рассуждениями, ругают критерий непротиворечивости, агитируют за критерий Беркли как за универсальный, единственно правильный; обосновывая математические факты, они выбрасывают критерий Беркли, пользуются обычными математическими методами обоснования. Эффективисты привлекают критерий Беркли в математике для другой цели. Как указывалось раньше, с помощью критерия Беркли эффективисты пытаются, во-первых, оправдать *выбрасывание* во «вне» математики парадоксов и недостаточно обоснованных частей математики, во-вторых, *ограничить* содержание и методы математики так, чтобы их развитие не привело в дальнейшем ни к каким парадоксам и противоречиям, не дало недостаточно обоснованных результатов. С этой целью эффективисты ограничивают поле своих исследований только тем, что может дать *сразу* эффективно обоснованные результаты. Рассуждает ли Борель о мере множества или интеграле, говорит ли он о теории вероятностей или о чем-либо другом — все его помыслы направлены к одному: исходя от принятых им содержания и методов математики, обосновать выдвинутые положения так, чтобы безупречная точность доказательств и построений заставила всех математиков признать полученный результат.

Из всех эффективистов Борель наиболее полно ответил на вопрос, что́ надо оставить «в» математике, и что́ нужно поставить «вне» математики.

По мнению Бореля, в математике могут быть поняты без двусмысленности только конечные и некоторые счетные множества. Следовательно, каждая математическая дисциплина должна строить свои теории, исходя от конечных и некоторых счетных множеств.

Без сомнения, пишет Борель, каждому математику ряд натуральных чисел представляется заданным с ясностью, исклю-

чающей всякую двусмысленность. Вместе с Пуанкаре Борель считает, что имеющаяся у всех математиков *одинаковая интуиция* натурального ряда содержит в себе метод доказательства с помощью полной индукции. Иначе говоря, проверенный тысячелетиями практики человечества (а потому и представляющийся всем без двусмысленности) ряд натуральных чисел Борель выдает за данный нам особой интуицией.

По Кантору, множество счетно, если между его элементами и целыми положительными числами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Долгое время, пишет Борель, математики считали это определение Кантора безупречно ясным и рассуждали о счетных множествах так, как будто для каждого из них действительно возможно установить эффективно взаимно-однозначное соответствие с числами натурального ряда. Вскоре, однако, заметили, что такое скрытое предположение приводит к противоречиям, к парадоксам. Отсюда Борель заключил, что не всякое счетное множество может быть понято всеми математиками без двусмысленности. Чтобы избавиться от противоречий и парадоксов, Борель предложил отказаться от определения Кантора и ограничиться изучением действительно перечислимых множеств (ensembles effectivement énumérables) [1]. Под действительно перечислимым множеством Борель понимает всякое множество, элементы которого действительно поставлены во взаимно-однозначное соответствие с числами натурального ряда. Например, множество чисел:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

есть действительно перечислимое, так как всякому натуральному числу n соответствует элемент $\frac{1}{2^{n-1}}$ этого множества и обратно. По мнению Бореля, когда говорят о действительно перечислимых множествах, к противоречиям не приходят.

Рассмотрим бесконечный ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2^n}+\ \ldots.$$

Все знают, что сумма этого ряда равна 2. Все знают как определить n-й член этого ряда. Точно так же, если мы рассматриваем последовательность:

$$a_1,\ a_2\ \ldots,\ a_n,\ldots,$$

[1] См. заметку Бореля, Sur les ensembles effectivement énumérables et sur les définitions effectives, Atti della reale Academia dei Lincei, 1919, v. 28, S. 2. p. 163.

относительно которой дан вполне определенный, *интуитивно* ясный закон определения a_n по n, каждый из нас знает эту последовательность и притом без какой-либо двусмысленности. «В первом и втором случае, — пишет Борель, — нам потребовалось *конечное число* слов для точного определения рассматриваемых множеств». По мнению Бореля, это доказывает, что, когда речь идет о множестве, оно будет понято всеми математиками одинаково и без двусмысленности, если любой элемент этого множества можно охарактеризовать индивидуально с помощью конечного числа слов. Именно такими множествами являются конечные и действительно перечислимые множества. Напротив, заключает Борель, если для определения множества требуется бесконечное количество слов, такое множество не может быть понято всеми математиками без двусмысленности, а потому и находится «вне» математики. Исходя от этих рассуждений Борель заключил, что в математике существует все то, что может быть определено конечным числом слов.

Когда говорят о критерии истины в математике в смысле Бореля, часто дают различные ответы. Борель, говорят некоторые, считает истинным (существующим) в математике только то, что требует для определения конечного числа слов. Другие, например Серпинский [1] и Лузин [2], усматривают критерий Бореля в требовании считать существующим в математике только то, что может быть конструктивно определено. Такое разногласие не случайно; в различных работах Борель, казалось бы, давал различные критерии существования в математике. На деле никакого разногласия в ответах Бореля нет. Если внимательно присмотреться к рассуждениям Бореля о действительно перечислимых множествах, то станет ясным, что требование определимости «конечным числом слов» является субъективно идеалистическим ярлычком на требовании определения множества или объекта посредством точного закона, позволяющего вычислить любой элемент множества. Всячески маскируясь за насмешками по адресу критерия непротиворечивости, Борель *на деле* думает так: если я рассуждал логически правильно, если полученный результат я могу дать помощью определенного закона или конструкции, то он будет понят всеми математиками одинаково и, следовательно, существует. Обратно, если я не могу дать

[1] *W. Sierpiński*, Leçons sur les nombres transfinis, Paris 1928, p. 104.

[2] См. п. 2, III прибавления Лузина к русскому переводу книги *Лебега*, Интегрирование и отыскивание примитивных функций, ГТТИ, 1934 г.

конструктивного определения объекта, не исключена возможность, что он будет понят двусмысленно. Например, если в данный момент я не могу определить множество законом, то, согласно критерию Беркли, надо стараться дать определение каждому его элементу в отдельности, что в случае бесконечного множества требует бесконечного числа слов. Но человек не может произнести бесконечное число слов, следовательно, такое множество находится «вне» математики, и им заниматься не рекомендуется. Таким образом, требование определимости конечным числом слов, равно как и требование конструктивного определения, по мнению Бореля, обеспечивает выполнимость критерия Беркли, а на деле ограничивает математику областью сразу постигаемых фактов, выбрасывает из математики все недостаточно обоснованные части и неэффективные доказательства.

Математик справедливо может назвать ограничения Бореля весьма тяжелыми. Однако с точки зрения идеализма Беркли это далеко не так. Беркли рассуждал весьма просто: вещь—идея, следовательно, множество существует, если я представляю *каждый* элемент множества в отдельности; но нельзя ясно представить все элементы бесконечного множества, следовательно, бесконечные множества не существуют. Беркли рассуждал просто и, с точки зрения субъективного идеализма, логически безупречно: если последовательно отстаивать субъективный идеализм, надо отрицать актуальную бесконечность, в какой бы форме она ни проявлялась. Как мы видели, эту же мысль отстаивал и Пуанкаре. Рискнуть на такую последовательность математик Борель не может. Под прикрытием рассуждений о «конечном» и «бесконечном» числе слов Борель убеждает нас, что множество существует, если *любой* его элемент может быть определен или сконструирован. Борель заменил слова Беркли «каждый в отдельности» словом «любой»; замена немалая, и только она позволила Борелю сохранить в математике счетные множества. Но «беда» в том, что слово «любой» несовместимо с критерием Беркли. Слово «любой» означает, что множество определено помощью общего закона, против же таких определений Борель не раз выступал с критикой. Слово «любой» предполагает существование в возможности, а критерий Беркли это отрицает. Таким образом, как и в случае рассуждений о «вне» математики, крикливые ярлычки о «конечном» и «бесконечном» числе слов, с одной стороны, ограничивают содержание и методы математики, а с другой — прикрывают *вынужденное отступление* Бореля от последовательного субъективного

идеализма, прикрывают его запутанность. Чувствуя путаницу своих воззрений, Борель не раз заявлял, что ему нравится позиция тех математиков, которые решительно ограничивают математику областью конечного и ставят «вне» математики бесконечность.

По мнению Лузина, для Бореля область математики есть область счетной бесконечности». После такого разъяснения одного из крупнейших эффективистов нам, казалось бы, ничего не остается делать, как перейти к рассмотрению тех математических теорий, коим Борель любезно разрешил существовать «вне» математики. Однако не будем торопиться. Верить Лузину в философии на слово — смешно. Посмотрим внимательнее — так ли уж «скуп» Борель, действительно ли он ограничил математику только конечными и действительно перечисленными множествами.

Едва ли необходимо разъяснять значение понятия континуума. Может быть проще сказать так: существование большинства математических дисциплин в существенной мере предполагает понятие континуума. Все это прекрасно известно Борелю. Но понятие континуума больше всего «питало» творцов парадоксов и противоречий. Борель попал в затруднительное положение: выбросить понятие континуума нельзя, — слишком пострадает математика; не выбросить — тоже нельзя, так приказывает критерий Беркли. Чтобы и «волки» были сыты и «овцы» были целы, Борель нашел весьма «простой выход»: он объявил континуум понятием чисто отрицательным, данным математикам геометрической интуицией.

По мысли Бореля, важнейшим свойством континуума является однородность, благодаря чему помощью специальных признаков нельзя охарактеризовать его отдельные элементы. Чтобы достичь цели, надо ввести арифметические понятия и, следовательно, возродить трудности, связанные с обоснованием арифметики. Борель считает действительное число определенным тогда, и только тогда, когда его можно аппроксимировать рациональными числами с любой степенью точности. Такие числа Борель называет вычислимыми; множество вычислимых чисел счетно.

По мнению Бореля, бессмысленно утверждать, что кроме счетного количества вычислимых чисел существуют другие, индивидуально определимые, числа. Таким образом, для Бореля несчетность континуума означает невозможность его исчерпания посредством счетных множеств.

Что бы ни говорил Борель, ему можно задать вопрос: данный геометрической интуицией континуум понимается всеми

математиками одинаково или неодинаково? Если одинаково,— значит, согласно критерию Беркли, континуум существует, неодинаково, — находится «вне» математики. Но на этот вопрос Борель не отвечает и не может ответить. Учитывая внутриматематическую полезность понятия континуума, Борель не только пренебрег связанными с континуумом парадоксами и противоречиями, но и выбросил временно критерий Беркли. Парадоксы, противоречия и критерий Беркли оказали влияние только в одном направлении: Борель оставил континуум в математике на правах «пасынка». Таким образом, Борель «сохранил» континуум ценой отказа от основных установок своей философии. Впрочем, говоря так, мы, пожалуй, слишком переоцениваем «философию» Бореля. Вернее другое заключение: сказанное о континууме показывает, что Борель хотя и придерживается критерия Беркли, но всегда способен от него отказаться.

Установив «границы» учения о множествах, Борель все остальные части этого учения ставит вне математики. Благодаря этому Борель старается не обсуждать общих теорем теории множеств и ограничивается только изучением конкретных множеств [1].

Рассматривая анализ, Борель установил класс множеств, как теперь говорят, измеримых B. По мнению Бореля, эти множества вполне удовлетворяют критерию Беркли, и так как, казалось, понятие B множества было достаточно общим, то Борель счел возможным ограничить область анализа рассмотрением этих множеств. Точно так же Борель считает необходимым ограничить анализ изучением вычислимых функций. Борель называет функцию вычислимой, если для вычислимого значения аргумента ее значение есть вычислимое число.

Можно было бы указать, что́ Борель считает необходимым оставить «в» математике из теории вероятностей; в этом, однако, нет нужды. И без этого ясно, что Борель старается (и это ему не всегда удается) ограничить математику в настоящее время строго обоснованными теориями и методами, которые ему кажутся интуитивно данными, ясными, удовлетворяющими критерию Беркли.

Посмотрим теперь, что Борель считает находящимся «вне» математики.

Первой «жертвой» критерия Беркли — Бореля является аксиома Цермело. Одним из следствий этой аксиомы является

[1] См. например его работы: Leçons sur la Théorie des fonctions и Méthodes et problèmes de Théorie des fonctions.

утверждение, согласно которому всякое множество можно представить в форме вполне упорядоченного множества. Но никто из современных математиков не может сказать, что он имеет ясное представление о вполне упорядоченном множестве мощности континуума. Признание аксиомы Цермело сопряжено с необходимостью признать существование неизмеримых множеств, равно как и множеств, каждый элемент которых не может быть охарактеризован индивидуально. Эффективистам всего этого вполне достаточно для «уничтожения» аксиомы Цермело.

Точно так же Борель отрицает второй числовой класс Кантора, т. е. класс:

$$1,2,\ \ldots,\ n,\ \ldots\ \omega,\ \ldots,\ \alpha,\ \ldots\ .$$

Борель старается всех убедить, что второй числовой класс Кантора не может быть определен конечным числом слов. *Борель утверждает, что второй числовой класс не только находится «вне» математики, но даже не существует.* В настоящее время, говорит Борель, мы не знаем закона, который позволил бы нам определять любое число второго числового класса, мы умеем определять только некоторые сегменты этого класса. Чтобы утверждать существование второго числового класса, мы, заключает Борель, должны пытаться определить каждое число этого класса индивидуально, для чего нам потребуется бесконечное число слов. Никто не способен произнести бесконечное число слов, следовательно, второй числовой класс находится «вне» математики. Но смогут ли математики дать такой закон в будущем? Борель думает, что нет. Мощность второго числового класса больше счетной мощности. Но «всякая система условий, содержащая ограниченное число слов, среди которых может фигурировать слово indéfiniment, не приводит ни к чему иному, как к ансамблям счетным; следовательно, пишет Борель, не могут достигнуть хорошего обозначения для ансамбля чисел Кантора, называемых числами второго класса» и, значит, этот класс не существует. Вообще слово transfini кажется Борелю подозрительным, так как, по его мнению, «из наших представлений нельзя вывести определение трансфинитного столь же ясное, как определение бесконечного».

Назвать приведенную выше аргументацию Бореля хотя сколько-нибудь серьезной — значит опять излишне переоценить его философию. Во-первых, в основе аргументации Бореля лежит его субъективно-идеалистическое понимание существования в математике: существовать в математике зна-

чит быть определенным с помощью принятых ранее, интуитивно ясных средств определения. На самом же деле объект может существовать и до того, как его кто-либо определит. Трансфинитные числа второго класса играют в математике немаловажную роль, в частности, например, служат для обозначения порядка элементов счетных последовательностей. Следовательно, нельзя сказать, что эти числа ничего не отражают в действительности. Во-вторых, хотя в настоящее время мы не знаем закона, позволяющего определить любой элемент второго числового класса, но отсюда не следует, что такой закон никто не сможет дать в будущем. Борель был бы прав только тогда, когда он доказал бы, что такой закон дать нельзя. Но его доказательство никого удовлетворить не может. Нельзя считать доказательством сомнения в возможности получить «из наших представлений» ясное определение трансфинитного; в конечном счете дело не в ясности представлений, а в том, насколько эти представления правильно отражают соотношения реальных вещей. Утверждение Бореля, что ограниченное число слов приводит только к определению счетных множеств, ни в чем не убеждает. Практика дает нам познание несчетных множеств, и мы можем конечным числом слов формулировать относящиеся к ним законы. Современный анализ никогда бы не достиг тех результатов, которыми по праву он может гордиться, если бы математики не считали определенными, существующими множества всех действительных чисел интервала (0,1) и т. п. Дело, следовательно, не в математике, которая познает бесконечность в ее различных формах, а в субъективном идеализме Бореля, который несовместим с математикой, опровергается ею, благодаря чему Борель вынужден выкидывать из математики полноценные теории.

Вместе с аксиомой Цермело и вторым числовым классом Борель ставит «вне» математики и трансфинитную индукцию.

Соответственно введенным ограничениям, Борель отклоняет все доказательства, в которых участвует аксиома Цермело, трансфинитная индукция и второй числовой класс. Борель отклоняет неэффективные доказательства существования. Только точно определенное или сконструированное, эффективно данное, существует в математике; все остальное или не существует или находится «вне» математики. Таково борелевское «решение» проблемы существования [1]. И это не

[1] Я назвал махизм Бореля, Лебега и Лузина эффективизмом, чтобы подчеркнуть, к каким они пришли выводам по вопросу о существовании в математике. Впервые на русском языке слово «эффективизм» как название философии Бореля, Лебега и Лузина употребил В. Гливенко.

случайно: антинаучный критерий Беркли ничего не может дать для преодоления трудностей роста математики, ведет только к оправданию выбрасывания этих трудностей.

Как уже указывалось, аксиома Цермело, трансфинитная индукция и второй числовой класс играют значительную роль в развитии теории функций действительного переменного (как дескриптивной, так и метрической), алгебры, топологии, функционального анализа и даже классического анализа. Еще бóльшим удельным весом обладают аксиоматический метод и неэффективные доказательства существования. Борель по существу оставляет нетронутыми только те математические методы и теории, которые непосредственно не связаны с методами теоретико-множественного характера. Однако теперь трудно назвать математическую дисциплину, на которой не сказалось бы влияние теории множеств; лучше говорить о степени этого влияния. Отсюда ясно, насколько Борель ограничивает содержание современной математики. Желание Бореля ограничить математику эффективно обоснованным, привело его к ревизии основных достижений современной математики, к сохранению математики классической плюс кусочки теоретико-множественной математики. Все это Борель сделал для того, чтобы выбросить, а не преодолеть противоречия и парадоксы современной математики, чтобы ограничить себя только тем, что, по его мнению, и в будущем не приведет к противоречиям. *Откажитесь от конструктивно не обоснованных общих математических концепций, не старайтесь преодолеть противоречия и парадоксы, с которыми эти концепции связаны, исходите от принятых мною объектов и методов математики и на этой базе ищите конкретные факты и развивайте теории, в настоящее время эффективно обосновываемые, — таков объективный смысл всех утверждений Бореля, прикрытых рассуждениями о «конечном числе слов», о «вне» математики и т. п.* В этом, и только в этом, состоит «борьба» Бореля за эффективные доказательства, точные определения, за реальную математику. Для полноты характеристики позиции Бореля нужно еще раз указать, что, советуя не заниматься «словесной спекуляцией», он не отрицает возможности решить некоторые трудности попутно, в качестве неожиданного результата удачной конструкции. Если бы с помощью принятых Борелем средств построения кто-либо эффективно доказал истинность аксиомы Цермело

или гипотезы континуума, Борель не замедлил бы зачислить полученные результаты из «вне» «в» математику. Таким образом, *махизм привел Бореля к эмпиризму, к индуктивизму в методах исследования.*

Математика многим обязана Борелю, Лебегу и Лузину за их математические работы. Ансамбли B, теория меры, интеграл Лебега и т. п. — все это дали эффективисты, эффективно обосновав, и все это вошло в математику в качестве классических результатов. Поэтому может показаться, что стремление эффективистов ограничить математику в объектах и методах, их желание дать каждой теории сразу эффективное обоснование, являются прогрессивным явлением, обеспечивающим возможность преодоления трудностей обоснования современной математики. На деле это не так.

Изыскание конкретных математических фактов было и будет одной из существенных сторон научного творчества математиков. Когда эффективистам удается эффективно обосновать тот или иной математический факт, мы можем их только приветствовать. И понятно почему — *конечной* целью *всякого* математического исследования должно быть эффективное обоснование полученных результатов. Реакционная ошибка эффективистов — она имеет основанием их метафизический субъективный идеализм — состоит в том, что задачу эффективного обоснования математики они понимают однобоко, доводят до абсурда.

Беда не столько в том, что эффективисты требуют немедленного эффективного обоснования каждой математической дисциплины, сколько в том, что они требуют выполнения этой задачи с помощью *ограниченных* средств построения, т. е. с помощью принятых ими (лучше сказать — принятых каждым из них) объектов и методов. Благодаря этому ряд полноценных результатов и методов математики ставится эффективистами «вне» математики, причем эти результаты рекомендуется не развивать, а методы не применять до тех пор, пока они не получат эффективного обоснования. Но на примерах из истории развития анализа и гиперболической геометрии мы видим, что ограничения и эмпиризм в исследовательской работе тормозят развитие математики, разрушают возможности преодоления трудностей ее обоснования, так как эти возможности связаны с дальнейшим логическим развитием необоснованных или недостаточно обоснованных частей математики. Надо не выбрасывать во «вне» математики недостаточно обоснованные ее части, а, напротив, логически их развивать; это наилучшим образом поможет усмотреть, как

надо выбрать или сконструировать математические объекты, конструктивно обосновывающие эти части математики. Конечно, на этом пути много трудностей. В настоящее время аксиома Цермело — только гипотеза, с точки зрения обычных математических представлений ведущая к парадоксам. Вероятно даже, что область ее применимости ограничена. Противоречия и парадоксы математики и логики исключительно трудны. Неэффективность многих доказательств в теории функций не является нормальным положением. Но все это не аргумент для выбрасывания из математики аксиомы Цермело, второго числового класса и т. п. Основное направление, по которому идет большинство математиков, — это поиски решения гипотезы континуума, исследования эффективного смысла аксиомы Цермело, попытки преодолеть парадоксы и противоречия математики и логики, заменить неэффективные доказательства доказательствами эффективными. Чтобы это сделать, надо не только искать сразу обосновываемые факты, но и логически развивать содержание учений, связанных с аксиомой Цермело, гипотезой континуума и т. п. Если аксиома Цермело и гипотеза континуума — истинные положения, такое направление исследовательской работы, несомненно, поможет усмотреть, с помощью каких *известных* методов или как нужно *развить* новые методы, чтобы с их помощью можно было эффективно решить эти проблемы. Конечно, возможно, что и эффективисты на своем пути могут получить положительные результаты, способствующие преодолению трудностей обоснования математики. Однако эффективисты идут вслепую, так как они не могут доказать, что с помощью принятых ими средств построения можно эффективно обосновать недостаточно обоснованные части математики. Путь эффективистов хотя и может привести к отдельным положительным результатам в области математики, в области ее обоснования пока ничего не дал и, вероятно, дать не может; правильнее предположить, что трудности обоснования будут преодолены помощью *существенно новых методов конструкций*. Не случайно большинство математиков западноевропейских стран и Америки в практике своей работы не следуют пути эффективистов. Не следует указаниям эффективистов и подавляющее большинство математиков Советского Союза. Математики Советского Союза занимаются развитием учений, связанных с аксиомой Цермело, не связывают себя ограничениями в методах и т. п. Своими работами математики Советского Союза достаточно ярко показали реакционность эффективизма. Принято утверждать, что в области теории функций

действительного переменного московские математики являются продолжателями французских ученых. Это, конечно, в основном правильно; в начале своей деятельности московские математики исходили преимущественно от работ французских ученых. Но не менее существенно также и то, что для продолжения работ французских ученых московские математики должны были отказаться от их методологии. Развив теорию A — множеств, а дальше и проективных множеств, московская школа теории множеств заняла первое место в мире; но вместе с тем при *построении* этих теорий пришлось отказаться от ограничительных тенденций эффективистов. Только Лузин остался на позициях эффективизма. К каким выводам это ненормальное положение привело Лузина, мы увидим из дальнейшего.

Итак, не в ограничениях, а в широком охвате поля исследований и методов работы надо искать решения трудностей обоснования и развития современной математики. Так, и только так, идет большинство современных математиков в *практике* своей исследовательской работы. Надо только напомнить, что достижение цели тем вероятнее, чем больше и сознательнее будут руководствоваться диалектическим материализмом математики, работающие в области обоснования математики. Быть может, известных фактов достаточно, чтобы в них усмотреть метод конструктивного решения некоторых нерешенных вопросов, но эти факты не были оценены по достоинству, ибо к ним подходили без знания материалистической диалектики.

Теперь естественно поставить вопрос: Борель основательно ограничил область и методы математики; все ли эффективисты согласны с Борелем или они оспаривают его выводы?

Когда какая-либо часть математики недостаточно обоснована, то оценка ее объективного значения во многом зависит от личных качеств математиков. В особенности трудно рассчитывать на однозначность ответов, если математики руководствуются «критерием» Беркли. По этой причине мнения эффективистов о границах математики существенно разделились. Крайнюю позицию занял Бэр. Как уже указывалось, в споре об аксиоме Цермело Бэр отрицал существование бесконечных множеств. Борель признал только «всякое конечное», а все остальное поставил «вне» математики. Из эффективистов наиболее «либерален» Лебег. Он согласился признать континуум и второй числовой класс, принял трансфинитную индукцию. Только аксиома Цермело кажется Лебегу находящейся «вне» математики. Таким образом, Борель находится посредине между Бэром и Лебегом. Между Борелем и Лебегом находится и Лузин, в последнее время считающий необходимым пойти в ограничениях даже дальше Бореля.

Однако различия во взглядах эффективистов на границы математики не имеют принципиального значения. Принципиальной значимостью обладает то общее, что *объединяет* всех эффективистов. Это общее — субъективный идеализм, непоследовательный, путаный, приводящий в математике к ограничению содержания и методов исследований, к индуктивизму в исследовательской работе.

В заключение подчеркнем еще одну особенность эффективизма. Требование определимости конечным числом слов, равно как и требование конструктивного определения эффективисты окружили «ореолом» громких фраз. Если верить эффективистам, то они, видите ли, борются за конкретное, предметное исследование, не желают заниматься химерами, не желают заниматься бесполезными философскими спорами. Они, видите ли, только математики и рассуждают как математики. Химерами пусть занимаются «идеалисты» вроде Адамара, Цермело и Гильберта. Подобными же заверениями неоднократно занимался ярый сторонник эффективизма — Лузин. «Рассуждение Цермело,—писал Лузин, — только греза, так как каждый из идеалистов, говоря о выборах, выбирает и грезит по-своему, и нет не только возможности сообщить своему собеседнику о проделанных в бесконечном количестве выборах, но и быть согласным даже с самим собой. Построение, которое нельзя описать, рассуждение, не могущее быть выполнимым во всех его шагах до конца, — все это находится вне науки. Победы и горести в мире призраков не окажут никогда никакого эффекта — ни задерживающего, ни ускоряющего — на ход науки, занятой открытием конечных соотношений между вещами мира чувств или мира концепций (Борель)... Истинная наука никогда не будет сборищем пустых слов и чисто логических понятий без концепций. Наука не есть логомахия. За словами всегда должна скрываться сама реальность»[1]. Хорошо, красиво пишет Лузин. Если судить по последней фразе, то эффективисты — страстные борцы за изучение действительного мира, враги идеализма. Однако все это — чепуха, оболочка. Если внимательно прочесть написанное Лузиным, то выводы будут такие:

реальность = миру чувств и концепций;

---

[1] *Лузин*, Современное состояние теории функций действительного переменного, ГТТИ, 1933 г., стр. 25.

математика = концепции из логических понятий;
критерий истины = критерию Беркли.

Короче говоря, за набором «красивых» фраз о «предметности», «реализме» исследований Лузин старается протащить субъективно-идеалистическое понимание предмета математики, оправдать выбрасывание из математики плохо обоснованных частей, оправдать индуктивизм в методах исследований. В этом, и только в этом, состоит «борьба» эффективистов за предметность математических исследований. Иначе говоря, за набором фраз о предметности исследований, за презрительным отношением к философии и т. п. в области математики Борель и его сподвижники проводят философскую линию Беркли, Юма, Маха и Пуанкаре, т. е. линию субъективного идеализма. Как Беркли и Мах, эффективисты маскируются, стараются создать впечатление истинных борцов за подлинную науку. И именно эти пышные фразы, эта маскировка сыграли немаловажную роль в поднятии махистской философии Бореля до уровня, якобы, нового, самостоятельного течения в буржуазной математике.

§ 4. ЭФФЕКТИВИЗМ ЛУЗИНА

В СССР горячим поклонником эффективизма является Лузин. Философские воззрения Лузина разделяют его некоторые ближайшие ученики.

Лузин стал эффективистом не случайно. Лузин — воспитанник старой «московской математической школы», основатель которой Бугаев, вкупе с философом-черносотенцем Лопатиным, пытались философски обосновать «незыблемость» самодержавия и православия. После Великой Октябрьской революции Лузин не перешел на позиции пролетариата. Не так давно газета «Правда»[1] разоблачила Лузина как вредителя на фронте советской математики.

Поскольку вся научная деятельность Лузина направлялась идеями французской математической школы, он воспринял эффективизм как одну из руководящих идей этой школы.

Борель и Лебег в некотором смысле могут быть названы творцами эффективизма: они, по-своему, внесли махизм в математику. Рассуждения об определимости конечным числом слов или конструкций, о «внутри» и «вне» математики и т. п., т. е. то, что позволило выдать разновидность махизма — эффективизм — за новое течение в буржуазной философии

[1] «Правда», № 181, 1936 г.

математики, — все это принадлежит Борелю и Лебегу. Лузин ничего не внес в разработку основных посылок эффективизма. Перу Лузина принадлежит немало работ, где в той или иной степени занимают место эффективистские рассуждения. Но все эти рассуждения являются *пересказом* основных идей Бореля и Лебега. Только в одном Лузин пошел дальше Бореля и Лебега — в *реакционности*. Развивая результаты математических работ Лебега и Суслина, Лузин, по существу, показывает, что ограничение поля математических исследований хотя и соответствует основным посылкам эффективизма, но вредит развитию математики. Стараясь спасти эффективизм, Лузин откровенно говорит о неверии в результаты собственных математических исследований. Тем самым Лузин показывает, что на современной стадии развития эффективизм приводит буржуазную математику к кризису. Таким образом, эффективист Лузин невольно выступил против эффективизма.

Лузин понимал, что открыто проповедовать в СССР идеи эффективистов — значит увеличить вероятность попасть под обстрел марксистской критики. Поэтому пропаганду идей эффективизма Лузин вел своеобразно-двурушническим способом: за границей Лузин отстаивал, защищал эффективизм, с позиций эффективизма критиковал другие направления в буржуазной философии математики; в Советском Союзе Лузин излагал взгляды эффективистов как, якобы, посторонний, ни в чем не заинтересованный человек. Только в 1934—1935 гг. Лузин рискнул полуоткрыто высказаться за эффективизм и в Советском Союзе.

Мы сперва рассмотрим, как Лузин боролся за эффективизм в Советском Союзе.

Влияние эффективизма на Лузина отчетливо видно в его диссертации, напечатанной в 1915 г.[1] Здесь Лузин отрицательно высказывается об аксиоме выбора Цермело, ставит под сомнение существование неизмеримых множеств, требует конструктивного определения математических объектов. Однако все это высказывается мимоходом, по большей части в подстрочных примечаниях. В диссертации Лузина есть одно интересное замечание. Он указывает, что теория функций действительного переменного строится на признании существования объектов вне человеческого мышления. «Теория функций действительного переменного, — пишет Лузин, — отправляется от самого общего определения понятия функции, данного Дирихле, понятия функции, как *соответствия*, со-

[1] *Лузин*, Интеграл и тригонометрический ряд, 1915 г.

вершенно независимо от того, каким образом это соответствие на самом деле может быть установлено, и даже независимо от того, можем ли мы установить это соответствие»[1]. Сказанное Лузиным правильно и говорит против эффективизма.

Впервые с развернутой пропагандой идей эффективизма Лузин выступил в докладе «Современное состояние теории функций действительного переменного»[2], который он прочел в 1927 г. на I Всероссийском съезде математиков. В этом докладе Лузин дает сравнительно полное описание как истории возникновения, так и содержания эффективизма, с позиций эффективизма критикует формализм Гильберта и интуиционизм Брауэра и Вейля. В философской части доклад Лузина может быть назван кратким введением в философию эффективизма на ... русском языке.

Читатель, знакомый с работами Бореля и Лебега, ничего нового для понимания эффективизма в этом докладе Лузина не найдет. Доклад Лузина интересен с другой стороны — как на русском языке излагает Лузин идеи эффективистов.

Возникновение эффективизма Лузин справедливо относит к спору об аксиоме выбора Цермело. Но, пренебрегая историей, Лузин указывает, что спор об аксиоме Цермело разделил *всех* математиков на реалистов и идеалистов. Как известно, спор об аксиоме выбора Цермело способствовал усилению уже имевшего место разделения *буржуазных* математиков на субъективных и объективных идеалистов. Реалисты — пишет Лузин — это, видите ли, те математики, которые настаивают на содержательном, предметном познании в математике; идеалисты — это математики, склонные считать существующими в математике даже призраки, если только доказательство их существования проведено строго математически. По «ведомству» реалистов Лузин зачисляет Бореля и Лебега, Адамара он причисляет к идеалистам. Иначе говоря, Лузин придерживается принятого среди эффективистов взгляда на разделение математиков по вопросу об истинности аксиомы Цермело. В чем состояла «борьба» Бореля и Лебега за «предметность» и «реализм» математики, мы уже знаем: под дымовой завесой слов о «предметности» и «реализме» Борель и Лебег старались отстоять в математике субъективный идеализм Беркли — Маха. Тем самым в 1927 году Лузин активно помогал Борелю и Лебегу протащить субъективный идеализм и в советскую математику. Этой же цели подчинены

[1] *Лузин*, Интеграл и тригонометрический ряд, 1915, стр. 1.
[2] Этот доклад (с дополнениями Лузина был издан ГТТИ в 1933 г.

и все последующие эффективистские размышления Лузина, высказанные им на русском языке.

В докладе Лузин сопоставлял эффективизм с интуиционизмом и формализмом. Ни интуиционизм, ни формализм его не удовлетворили. Интуиционизм, видите ли, слишком много разрушил, ничего не создав взамен. «Он есть, в сущности, смесь обостренной критики и догматизма теологического характера. Он возводит конечное в догму; но та «революция», которую он обещал внести в математику, является не освобождением мысли, но загромождением путей исследования, т. е., в сущности, одним из реакционных запретов мысли»[1]. Конечно, очень приятно, что эффективист Лузин считает интуиционистов реакционерами. Правильно и то, что интуиционисты — догматики теологического характера. Однако и эффективизм отнюдь не противоречит поповщине. Если же Лузин рассердился на интуиционистов за их, якобы, полное отречение от бесконечного, то и это напрасно: по существу эффективисты сами сумели сохранить бесконечное за счет отказа от собственных философских посылок, которые идентичны посылкам интуиционизма. Следовательно, гневные слова Лузина об интуиционизме полностью приложимы и к ... эффективистам. По мнению Лузина, формализм привлекательнее интуиционизма. Все же Лузин считает, что интуиционизм и даже формализм не получили надлежащей степени развития, почему и не могут служить орудием отыскания новых фактов в математике. Какое же направление в философии математики обладает действенной силой? На этот вопрос Лузин прямого ответа не дает. Но если внимательно прочесть доклад Лузина, то станет ясно, что таким направлением он считает эффективизм. Борель советовал отказаться от общего учения о множествах, изучать лишь определенные, им принятые классы множеств. Отметив этот факт, Лузин как бы мимоходом указывает: «Ясно, что этот прием есть истинно научный, тот, который приводил математический анализ к его лучшим открытиям». Так Лузин пытался убедить советских читателей, что только эффективизм является действенной философией, позволяющей находить новые факты в математике. В чем состоит «действенность» эффективизма, мы тоже знаем: эффективизм ограничивает и тормозит математические исследования. Что это так, мы еще раз убедимся на примере исследований самого Лузина. Вот эту-то реакционную сторону эффективизма Лузин пропагандировал

[1] 31-я страница доклада Лузина.

в Советском Союзе как исключительное достижение буржуазной философии математики. Если еще указать, что упоминания о философских работах Бореля и Лебега Лузин всегда сопрягает со словами «знаменитые», «прекрасные» и т. п., то, полагаем, картина будет полной.

В 1934 г. ГТТИ издало перевод книги Лебега «Интегрирование и отыскание примитивных функций». В своем третьем прибавлении к этой книге Лузин вновь обращается к вопросам обоснования математики. Здесь Лузин солидаризуется с эффективизмом; в подстрочном примечании он пишет, что не понимает взглядов Адамара, Гильберта и их сподвижников. Лузин требует исключительно конструктивного определения математических объектов и т. п.

В 1935 г. Лузин читал доклад на майской сессии Академии Наук СССР «О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций». Здесь Лузин снова повторил некоторые утверждения эффективистов и старался показать, что, якобы, эффективизм подсказывает наиболее правильные пути решения проблем, рассматриваемых в дескриптивной теории функций.

Посмотрим теперь, как Лузин защищал эффективизм за границей. Как уже указывалось, за границей Лузин защищал эффективизм открыто. «Автор этой книги разделяет точку зрения эмпиристов», — пишет Лузин в самой крупной своей работе, изданной во Франции [1]. Защита эффективизма Лузиным за границей находила место в его исследованиях, напечатанных в журналах «Comptes Rendus Acad. Sc.» и «Fundamenta Mathematicae». В 1928 г. на Международном математическом конгрессе в Италии Лузин выступил с эффективистской критикой попытки Гильберта доказать непротиворечивость гипотезы континуума.

Особый интерес представляют философские высказывания Лузина, изложенные в его «Leçons sur les ensembles analytiques». В этой книге Лузин вновь повторяет обычные утверждения эффективистов: требует индивидуальной определимости элементов множеств, присоединяется к мнению Бореля о необходимости исключить из математики второй числовой класс, рассматривает теорию иррациональных чисел Дедекинда как вспомогательный инструмент и т. п. Но наряду с этим в рассуждениях Лузина содержатся новые моменты, которых нельзя найти у Бореля и Лебега.

При рассмотрении эффективизма Бореля и Лебега мы указывали, что Борель старался выяснить вопрос, с каким множеством точек имеет дело математический анализ. Борель установил класс так называемых множеств измеримых B, причем долгое время казалось, что математический анализ имеет дело только с этими множествами. Лебег даже сделал неудачную попытку обосновать это положение. Однако Суслин и Лузин построили примеры индивидуальных множеств неизмеримых B и, «таким образом, была сделана брешь в кругу измеримостей B как единственно «подлинно математических»[1]. Новые множества получались от применения к законным множествам, измеримым B, законной операции проектирования. Применяя операцию проектирования и взятия дополнения к уже полученным множествам новой природы, Лузину удалось получить множества еще более сложной структуры; среди этих множеств были и такие, ни одного элемента которых мы назвать не можем, точно так же как и не можем сказать, измеримы ли эти множества или неизмеримы. Иначе говоря, применяя допущенные эффективизмом операции к допущенным же эффективизмом множествам, Лузин построил множества, незаконные с точки зрения эффективизма. Эффективизм попал в незавидное положение. Желая выйти из затруднительного положения, так чтобы эффективизм не пострадал, Лузин сперва развил соображения, явно еще более реакционные, чем вся философия Бореля. Лузин предложил отказаться от общего борелевского определения множеств, измеримых B, допускать в анализ только такие из этих множеств, которые не противоречат эффективизму. «Если мы хотим ограничить математический анализ изучением вполне законных (с точки зрения эффективизма. — *В. М.*) сущностей,— писал Лузин,— отношения между которыми вполне определены, следует, с точки зрения эмпиристов, жертвовать некоторыми множествами, измеримыми B, и даже некоторыми иррациональными числами» [2].

Вероятно, соображения о дальнейшем ограничении поля математических исследований показались Лузину неубедительными. Наряду с ними мы находим у Лузина другие соображения, столь часто встречающиеся у современных буржуазных ученых: во имя защиты эффективизма Лузин пытается дискредитировать полученные им математические факты. Автор «склонен рассматривать построенные им примеры, — пишет Лузин, — как составленные из слов и не определяющие действительно законченных сущностей, но только *возможно-*

[1] *N. Lusin,* Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

[1] *Лебег,* Интегрирование и отыскание примитивных функций, стр. 300.

[2] См. Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930, p. 323.

ты. В частности, он рассматривает проективные множества, определение которых не может быть закончено, как чисто отрицательные возможности, ускользающие от всяких способов положительного определения» [1]. Аргументация такого заключения составлена Лузиным в обычном эффективистском духе. Но дело, конечно, не в аргументации. Дело в том, что на *современной стадии развития эффективизм приводит к подлинному кризису математики, не только тормозит, но и пытается душить математические исследования*. И любопытно то, что доказал это эффективист Лузин на примере собственных математических работ. За это надо Лузину сказать спасибо. Впрочем, еще за одну деталь надо поблагодарить Лузина. В конце своей книги Лузин заявил, что из создавшихся затруднений можно найти выход только на пути исследования конкретных математических фактов, что философия делу помочь не может. Действительно, идеалистическая философия (в частности, эффективизм) делу помочь не может. С такой оговоркой — не всякая философия, а идеалистическая философия не может помочь делу — мы можем принять вывод Лузина. Точно так же прав Лузин в оценке роли фактов. «Беда» только состоит в том, что это заключение противоречит эффективизму, так как эффективисты рассуждают диаметрально-противоположно: если факты противоречат нашим основным установкам, то тем хуже для фактов, мы их поставим «вне» математики. Просто-напросто в Лузине на минуту проснулся подлинный ученый.

Итак, *на примере своих работ Лузин показал, что эффективизм приводит к кризису математики*; в этом несомненная заслуга Лузина, за которую, надо полагать, эффективисты его не поблагодарят.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Каковы причины возникновения эффективизма?

Возникновение эффективизма связано с трудностями обоснования современной математики. Однако трудности роста современной математики способствовали развитию эффективизма потому, что Борель, Лебег и другие буржуазные математики постоянно находились под влиянием реакционной, антинаучной идеалистической философии эпохи империализма, потому что они не знали материалистической диалектики. Именно реакционная философия эпохи империализма использовала философские шатания Бореля и Лебега, закрепила и направила их философские выводы, вывела их на «широкий путь» махизма в математике. Развитие эффективизма подтверждает указание Ленина, что в современном буржуазном обществе «реакционные поползновения порождаются самим прогрессом науки». Лузин стал эффективистом потому, что идеология и философия современной реакционной буржуазии были для него вершиной достижений культуры, потому что его научные интересы определялись школой Бореля и Лебега.

[1] *Лузин*, там же, стр. 322.

Что представляет собою эффективизм?

Эффективизм — это одна из математических школ, которая в математике продолжает философскую линию Беркли, Маха и Пуанкаре, т. е. защищает путаный, непоследовательный субъективный идеализм. В математическом отношении школа эффективистов обладает достаточно большим международным весом. Однако среди математиков мира эффективисты представляют небольшую горсточку людей, безуспешно пытающихся направить исследовательскую работу по руслу, предопределяемому их основными философскими установками. В противовес им, основная масса советских математиков и большинство математиков буржуазных в *практике* своей исследовательской работы придерживаются стихийно-материалистических воззрений.

Как эффективисты решают трудности обоснования математики?

Ни о каком эффективистском решении проблем обоснования современной математики не может быть и речи. Эффективисты не преодолевают, не решают, а отбрасывают или, что еще хуже, запутывают трудности обоснования математики, тормозят развитие математики. Реакционность эффективизма в математике именно и состоит в том, что он оправдывает выбрасывание недостаточно обоснованных частей математики или оправдывает инертное к ним отношение. Реакционность эффективизма в математике состоит также в том, что в силу субъективно-идеалистических посылок своей философии эффективисты настаивают на эмпиризме в методах исследовательской работы, благодаря чему уничтожаются возможности преодоления трудностей роста математики. Благодаря метафизичности своих субъективно-идеалистических установок эффективисты не сумели наметить правильную линию исследовательской работы. Очень часто беспредметным, формальным исследованиям математиков они противопоставляли ограничения поля и методов исследования математики, т. е. противопоставляли то, с чем не может согласиться ни один исследователь, если только он не погряз в тине идеалистических представлений.

Какова общественная значимость эффективизма?

Ответить на этот вопрос—значит сказать, какова общественная значимость махизма. Впервые на этот вопрос с исчерпывающей полнотой ответил В. И. Ленин, который доказал, что в буржуазном обществе общественная значимость махизма в конечном счете сводится к защите поповщины и господства капитализма, к борьбе против материализма. Что бы ни писали Пуанкаре, Борель и Лебег, как бы они ни относились презрительно к философии, но они шатаются, делают идеалистические выводы. Реакционная идеалистическая философия подхватывает, закрепляет философские выводы эффективизма, включает их в свой арсенал орудий защиты поповщины и господства капитализма и борьбы против мировоззрения революционного пролетариата, т. е. против марксизма-ленинизма. Таким образом, в буржуазном обществе объективная роль эффективизма, как и махизма в целом, только одна: расчистить дорогу идеализму и фидеизму, служить им верную службу.

В Советском Союзе наличие нескольких математиков, разделяющих взгляды эффективистов, является лишним доказательством того, что мы живем в капиталистическом окружении, которое дает себя знать не только засылаемыми к нам диверсантами, шпионами, вредителями и убийцами, но и попытками идеологического разложения, внесения к нам яда идеализма, религии, расизма и т. п., иногда под прикрытием той или другой модной лженаучной теории.

Задача советских математиков состоит в том, чтобы научиться отсекать реакционную тенденцию работ эффективистов, беря из них то, что действительно научно, а потому и ценно. Но чтобы научиться проводить свою линию, уметь по достоинству оценивать результаты буржуазных математиков, надо постоянно овладевать учением Маркса, Энгельса, Ленина, Сталина. Надо всегда помнить гениальное указание В. И. Ленина, что «без солидного философского обоснования никакие естественные науки, никакой материализм не может выдержать борьбы против натиска буржуазных идей и восстановления буржуазного миросозерцания. Чтобы выдержать эту борьбу и провести ее до конца с полным успехом, естественник должен быть современным материалистом, сознательным сторонником того материализма, который представлен Марксом, то-есть должен быть диалектическим материалистом» [1].

[1] *Ленин*, Соч., т. XXVII, стр. 187.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Введение. Как в начале XVIII столетия епископ Беркли «опровергал» материализм в математике. 5

Глава I. Основные трудности обоснования современной математики 11

§ 1. Некоторые особенности предмета исследований современной математики 11

§ 2. Трудности построения теории множеств. 16

§ 3. Парадоксы и противоречия теории множеств. 21

§ 4. Аксиоматическое построение теории множеств. . . 22

§ 5. Трудности, связанные с аксиомой Цермело. . . . 24

§ 6. Проблема существования в математике. 26

Глава II. Конвенционализм и эффективизм в математике. . . 36

§ 1. Конвенционализм 36

§ 2. Зарождение эффективизма 53

§ 3. Эффективизм Бореля и Лебега 56

§ 4. Эффективизм Лузина 78

Заключение 84